

أخي المسلم أختي المسلمة

ساهم في نشر هذا الكتاب

لعل الله يرجع لهذه الأمة

سابق عهدها

# الميكانيكا التحليلية

تأليف

أ. د/ أبو النور عبد الله  
أستاذ الرياضيات بجامعة جنوب الوادي  
وكلية التربية للبنات - جازان

أ. د/ إسماعيل حسانين  
أستاذ الرياضيات بجامعة أسيوط  
وكلية التربية للبنات - الرياض

الدكتور/ فؤاد سيّد  
أستاذ الرياضيات المساعد بجامعة أسيوط

مكتبة الرشيد  
ناشر

## فهرس المحتويات

❖ مقدمة الكتاب..... ١١

### الفصل الأول

❖ مقدمة..... ١٧  
 ❖ القيود وأنواعها..... ٢١  
 ❖ أنواع الأنظمة الميكانيكية..... ٢٣  
 ❖ الإحداثيات المعممة..... ٢٧  
 ❖ معادلات التحويل بين الإحداثيات..... ٢٧  
 ❖ السرعات المعممة..... ٣٠  
 ❖ درجات الحرية للمجموعة..... ٣٠  
 ❖ الإزاحات الصغيرة في الإحداثيات..... ٣٤  
 ❖ القوى المعممة..... ٣٥  
 ❖ طاقة الحركة وكمية الحركة المعممة..... ٣٦  
 ❖ المجموعات المحافظة والمجموعات الغير محافظة..... ٤٢  
 ❖ أمثلة وتمارين..... ٤٩

### الفصل الثاني

❖ معادلات لاجرانج للمجموعات تامة التقييد..... ٥٥  
 ❖ تطبيقات على استخدام معادلات لاجرانج..... ٩٦  
 ❖ معادلات لاجرانج للمجموعات غير تامة التقييد..... ١٠٥  
 ❖ معادلات لاجرانج والقوى الدفعية..... ١٠٩

### الفصل الثالث

❖ مقدمة..... ١٢١  
 ❖ تعريف كمية الحركة المعممة..... ١٢٢  
 ❖ تعريف دالة هاملتون..... ١٢٣  
 ❖ استنتاج معادلات هاملتون..... ١٢٤  
 ❖ أمثلة وتمارين..... ١٦٥

### الفصل الرابع

❖ مقدمة..... ١٦٩  
 ❖ مبدأ هاملتون للتأثير الأقل (أو الفعل الأقل)..... ١٦٩  
 ❖ قاعدة (مبدأ) هاملتون..... ١٧٤  
 ❖ استنتاج معادلات لاجرانج من مبدأ هاملتون..... ١٧٥

## محتويات الكتاب

❖ أمثلة وتمارين ..... ١٩٧

### الفصل الخامس

❖ الإحداثيات الدورية أو المهمة ..... ٢٠٢

❖ طرق دراسة المسائل الديناميكية المحتوية على الإحداثيات المهمة ..... ٢٠٣

❖ دالة ومعادلات راوث ..... ٢١٢

### الفصل السادس

❖ التحويلات القانونية أو تحويلات التماس ..... ٢٣١

❖ الدوال المولدة ..... ٢٣٦

❖ شرط التحويلات القانونية ..... ٢٤٥

❖ معادلة هاميلتون - جاكوبي ..... ٢٧١

❖ أمثلة وتمارين ..... ٢٩٥

### الفصل السابع

❖ أقواس لاگرانج ..... ٢٩٩

❖ أقواس بواسون ..... ٣٠٠

❖ خواص أقواس بواسون ..... ٣٠٢

❖ اختبار قانونية التحويل باستخدام أقواس بواسون ولاگرانج ..... ٣٠٥

❖ أمثلة وتمارين ..... ٣١١

### الفصل الثامن

❖ تعريفات ..... ٣١٥

❖ قانون العزم والعجلة الزاوية ..... ٣١٥

❖ طاقة حركة جسم يتحرك حركة مستوية ..... ٣١٥

❖ كمية الحركة الزاوية لجسم متماسك ..... ٣١٧

❖ دراسة حركة البندول المركب ..... ٣١٨

❖ دراسة كرة تتدحرج على مستوى مائل خشن ..... ٣٢٢

❖ الملاحق ..... ٣٣٥

❖ المراجع ..... ٣٦٥

## مقدمة الكتاب

الحمد لله على نعمائه التي لا تحصى ولا تعد والصلاة والسلام على معلمنا ونبينا محمد صلى الله عليه وسلم الذي تركنا على المحجة البيضاء ليلها كنهارها لا يزيغ عنها إلا هالك... ثم أما بعد .

هذا المؤلف هو حصيلة مجهود من تدريس مادة هذا الكتاب لا كثر من ربع قرن وهو واحد من سلسلة مؤلفات باللغة العربية في أحد فروع الرياضيات إلا وهو الميكانيكا التحليلية والتي تتميز بأنها تركز بصورة رئيسيه على مبادئ عامة (تفاضليه أو تكاملية) ومن ثم تنتج المعادلة أو المعادلات التفاضلية للحركة .

والميكانيكا التحليلية لها تطبيقات عديدة في الرياضيات والفيزياء والهندسة وخاصة في ميكانيكا الكم والميكانيكا الموجية والميكانيكا الإحصائية وحساب التغيرات وحساب الامثلية والأنظمة الديناميكية والمعادلات التفاضلية... الخ .

والطرق المقدمة في مادة الكتاب هي من الطرق الرياضية العامة التي تعتمد على معادلات لاگرانج وهاملتون والتي هي تطوير لقوانين نيوتن والتي تصيغ المسائل الرياضية صياغة حديثة تؤدي إلى سهولة التعامل معها خاصة المسائل الصعبة، وتمتاز أيضاً بسهولة تطبيقها لإى نوع من الاحداثيات . وهذا ما عرضناه في مادة هذا الكتاب والذي يتكون من عدة أبواب بالإضافة إلى بضع مرفقات .

ففي الباب الأول يتعرف القارئ على مفاهيم عامة للقيود تعريفها وأنواعها، والاحداثيات المعممة ودرجات الحرية والأنظمة الديناميكية الهولونومية وغير الهولونومية والاسكليرونومية والمجموعات المحافظة وغير المحافظة واحتوى هذا الفصل أيضاً على مجموعة من الأمثلة التوضيحية .

## مقدمة الكتاب

أما الباب الثاني تضمن اشتقاق معادلات لاجرانج للمجموعات تامة التغيير وغير تامة التغيير وعلاقة الشغل المبزول بالقوى المؤثر والقوى المعمة وذيل هذا الباب بمجموعة من الأمثلة .

في الباب الثالث : اختص هذا الباب بمادلات هاملتون وقد إستهللناه بتعريف كمية الحركة المعمة ودالة هاملتون ثم إستنتاج معادلات هاملتون وإعطاء مجموعة من التطبيقات على دالة هاملتون وعلاقة معادلات هاملتون بداله لاجرانج .

الباب الرابع : خصصنا هذا الباب لدراسة مبدأ هاملتون وحساب التباير وكيفية إستنتاج معادلات أولر لاجرانج من مبدأ هاملتون واحتوي هذا الفصل كذلك على العديد من الأمثلة على الأنظمة الديناميكية والتطبيقات الهندسة كتطبيقات على مبدأ هاملتون للفعّل الأقل .

في الباب الخامس : اشتمل على الاحداثيات الدورية أو المهملة وطريقة دراسة المسائل الديناميكية المحتوية على هذه الاحداثيات ، واشتمل هذا الباب على دالة ومعادلات راوث والعديد من التطبيقات .

الباب السادس : خصص لإيجاد التحويلات القانونية (تحويلات التماس) والدوال المولدة . وكذلك تعرضنا للشروط التي تجعل التحويلات قانونية ، واختبار قانونية التحويل \_ وإيجاد معادلات هاملتون جاكوب وذيل بالعديد من الأمثلة .

الباب السابع : خصص لتعريف أقواس بواسون ولاجرانج وخصائصها واختبار قانونية التحويل باستخدامها وفي نهاية الباب تم إعطاء العديد من الأمثلة .

الباب الثامن والأخير : أختص لدراسة حركة جسم متماسك باستخدام معادلات لاجرانج حيث إستهللنا هذا الباب بتعريفات مهمة مثل قانون العزم والعجلة الزاوية، وطاقة الحركة، وكمية الحركة الزاوية ثم دراسة حركة البندول المركب وأمثلة أخرى .

## مقدمة الكتاب

وفي جميع أبواب الكتاب حرصنا على وجود العديد من الأمثلة والتمارين وإعطاء عدة مرفقات تحوى العلاقة بين الإحداثيات في الأنظمة المختلفة وتطبيقات على حساب التفاضل .

وأخيراً نتمنى أن نكون قد وفقنا في وضع مادة هذا الكتاب فإن كان هناك نقص أو خلل فهذه صفة ابن آدم والكمال لله وحده سبحانه وتعالى .

وعلى الله التوفيق

المؤلفون

# الفصل الأول

- \* مقدمة
- \* القيود وأنواعها
- \* أنواع الأنظمة الميكانيكية
- \* الإحداثيات المعممة
- \* معادلات التحويل بين الإحداثيات
- \* السرعات المعممة
- \* درجات الحرية للمجموعة
- \* الإزاحات الصغيرة في الإحداثيات
- \* القوى المعممة
- \* طاقة الحركة وكمية الحركة المعممة
- \* المجموعات المحافضة والمجموعات الغير محافضة
- \* أمثلة وتمارين

## الفصل الأول

### مقدمة Introduction

ليس هناك تفسير واحد متفق عليه لمصطلح "الميكانيكا التحليلية" في مؤلفات الميكانيكا. فبعض المؤلفون يطابقون الميكانيكا التحليلية بالميكانيكا النظرية. ويرى البعض الآخر بأن علم الديناميكا التحليلية يختص باستنتاج طرق رياضية عامة لدراسة حركة المجموعة الديناميكية باستخدام طرق عامة تعتمد على ما يسمى بمعادلات لاجرانج وهاملتون بدون التطبيق المباشر لقوانين نيوتن للحركة بالرغم من أن هذه المعادلات هي في الحقيقة تطوير لهذه القوانين. وتستخدم الميكانيكا التحليلية لسهولة تطبيقها لأي نوع من الإحداثيات.

ويجب أن نتذكر الحركة الديناميكية في ديناميكا نيوتن كنا نتبع خطوات معينة لدراسة الحركة منها اختيار محاور مناسبة سواء ثابتة أو دوارة ومعها نختار إحداثيات مناسبة أيضاً كارتيزية أو أسطوانية أو كروية ... ثم أخذ الجسم في وضع عام وبيان القوة المؤثرة عليه ثم نحدد صيغ مركبات العجلة في الإحداثيات المناسبة ثم نطبق قوانين نيوتن ثم نكامل معادلات الحركة مع استخدام الشروط الابتدائية فنحصل على حل المسألة من وضع الجسم.

وتتميز طريقة عرض الميكانيكا التحليلية بأنها تركز بصورة رئيسية على مبادئ عامة (تفاضلية أو تكاملية). ثم تنتج المعادلات التفاضلية الأساسية للحركة من هذه المبادئ بطريقة تحليلية. ويتكون المحتوى الأساسي للميكانيكا التحليلية من عرض المبادئ العامة للميكانيكا، واستنتاج المعادلات التفاضلية الأساسية للحركة من هذه المبادئ، ودراسة المعادلات نفسها وطرق تكاملها.

ويجب أن نتذكر الحركة الديناميكية في ديناميكا نيوتن كنا نتبع خطوات معينة لدراسة الحركة منها اختيار محاور مناسبة سواء ثابتة أو دوارة ومعها نختار إحداثيات مناسبة أيضاً كارتيزية أو أسطوانية أو كروية ... ثم أخذ الجسم في وضع عام وبيان القوة المؤثرة عليه ثم نحدد صيغ مركبات العجلة في الإحداثيات المناسبة ثم نطبق قوانين نيوتن ثم نكامل معادلات الحركة مع استخدام الشروط الابتدائية فنحصل على حل المسألة من وضع الجسم.

فلقد درسنا في مقررات الميكانيكا السابقة حركة الجسيمات مستخدمين قوانين الحركة لنيوتن التي يمكن تلخيصها على النحو التالي:

١- كل جسيم يظل على حالته من السكون أو الحركة الخطية المنتظمة (أي الحركة بسرعة ثابتة) ما لم تؤثر عليه قوة خارجية. ويبدو هذا معقولاً ومتفقاً مع خبرتنا اليومية، فنحن نعلم أن الأجسام الساكنة تستمر في حالة السكون حتى تتسبب قوة خارجية ما في حركتها، كلنا يدرك هذه الحقيقة.

أما الجزء الثاني من القانون فإنه أكثر ذكاءاً وهو ما يلي: يستمر الجسيم المتحرك في حركته في خط مستقيم بسرعة ثابتة ما تؤثر عليه قوة محصلة تختلف عن الصفر.

ولكن يبدو أن الخبرة العامة تناقض هذا، فنحن نعلم أن أي شئ لا يستمر في حركته بدون تغيير إلى الأبد. فإذا دحرجت كرة على الأرض فإنها سرعان ما تتوقف.

كذلك فإن الجسم المعدني الذي ينزلق على منضدة ملساء يتباطأ تدريجياً ليتوقف في نهاية الأمر. وهناك حالات مشابهة كثيرة أخرى.

ومع ذلك فإن كل من الأمثلة المذكورة ليس اختباراً صحيحاً لقانون نيوتن فهناك قوة تؤثر على كل من هذه الأجسام تحاول وقف حركته الأفقية وهي قوة الاحتكاك.

ونحن جميعاً نعلم أنه كلما زادت الاحتياطات التي نتخذها للتخلص من هذه القوة كلما قلت سرعة وصول الجسيم إلى حالة السكون. وقد عمم نيوتن هذه الملاحظة على الحالة التي تختص فيها قوة الاحتكاك واستنتج أنه إذا كانت هذه الحالة ممكنة فإن الجسيم المتحرك لن يتوقف أبداً.

٢- إذا كانت  $\vec{F}$  هي القوة (الخارجية) المؤثرة على جسيم كتلته  $m$ ، فتتحرك نتيجة لذلك بسرعة  $\vec{V}$  يكون:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{p})$$

حيث  $\vec{p} = m\vec{v}$  تسمى كمية الحركة.

وإذا كانت  $m$  لا تعتمد على الزمن (أي ثابتة) فإنه يصبح لدينا:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

حيث  $\vec{a}$  هي العجلة التي يتحرك بها الجسم.

٣- إذا أثر جسم 1 على جسم 2 بقوة  $\vec{F}_{12}$  تعمل في اتجاه الخط الواصل بين

الجسمين، بينما أثر الجسم 2 على الجسم 1 بالقوة  $\vec{F}_{21}$  فإن:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

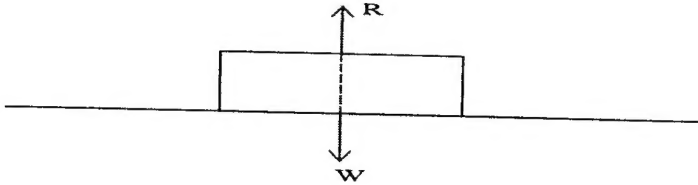
وبصيغة أخرى:

لكل فعل يوجد "رد فعل" مساو له في المقدار ومضاد له في الاتجاه.

في شكل (١ - ١) التالي يدفع القالب المنضدة إلى أسفل (هذه هي القوة الأولى) فتدفع

المنضدة القالب إلى أعلى (هذه هي القوة الثانية).

شكل (١ - ١)



وقد اكتشف في أوائل القرن العشرين أن النتائج النظرية المختلفة التي تستتج من قوانين نيوتن لا تتفق مع بعض النتائج المستنبطة من نظريات الكهرومغناطيسية والظواهر الذرية، والتي أمكن إثبات صحتها عملياً. وقد أدت هذه التناقضات إلى ظهور الميكانيكا النسبية لأنشتين Theory of relativity التي غيرت مفاهيم الزمن والفراغ، كما أدت إلى ظهور ميكانيكا الكم (Quantum mechanics) والميكانيكا الإحصائية (Statistical mechanics) وعلم الإلكتروديناميكا (electrodynamics)

أما بالنسبة للأجسام التي تتحرك بسرعات أقل بكثير من سرعة الضوء والتي لها أبعاد كبيرة إذا ما قورنت بأبعاد الذرات والجزيئات، فإن "ميكانيكا نيوتن" أو "الميكانيكا الكلاسيكية" تظل صالحة، لهذا السبب فإنها لا تزال محتفظة بمكانة هامة في العلوم والهندسة.

الغرض من هذا المقرر هو معالجة بعض المسائل باستخدام طرق عامة ووصفة خاصة تلك التي تعزى إلى لاجرانج وهاملتون حيث استطاع لاجرانج أن يكتب معادلات الحركة في صورة جديدة وعامة ويصل إلى نفس الهدف (دون الاعتماد) على صيغ العجلة في الإحداثيات المختلفة. وتطبق معادلات لاجرانج بدون تغيير صورتها الرياضية عند استخدام أي نوع من الإحداثيات. حيث أدخل ما يسمى بالإحداثيات المعممة.

والميكانيكا التحليلية يمكن أن تختزل إلى ميكانيكا نيوتن وتتميز بالسهولة وعلاقتها الوطيدة سواء من الناحية النظرية أو التطبيقية ببعض المجالات الحرفية مثل ميكانيكا الكم، الميكانيكا الإحصائية والإلكتروديناميكا.

ودراسة الميكانيكا التحليلية تعتمد على عدة مفاهيم وسنشرحها بالتفصيل ومن هذه المفاهيم :

المجموعة الديناميكية - الإحداثيات المعممة - الطاقة وصياغتها بدلالة الإحداثيات المعممة - معادلات لاجرانج ومعادلات هاميلتون ومعادلات جاكوب وهي تمثل معادلات الحركة في الديناميكا التحليلية. وهي لا تغيرية الشكل وهي مصاغة بدلالة الإحداثيات المعممة - تكامل معادلات الحركة واستخدام الشروط الابتدائية فنحصل على الموضع وهو ما حصلنا عليه في ميكانيكا نيوتن.

ونسأل الله العلي القدير أن ينفعنا بما علمنا ويعلمنا ما ينفعنا ويزدنا علما ويلحقنا بالصالحين.

## بعض المفاهيم العامة في الميكانيكا التحليلية

## ١.١ مفهوم الأنظمة (المجموعة) الديناميكية:

هو مفهوم يطلق على الجسيمات المتحركة في الفراغ تحت تأثير قوى خارجية أو داخلية.

وقد توجد قوى ناتجة عن وجود قيود (مثل بحركة جسيم على سطح معلوم) مثل قوى ردود الأفعال.

وحيث أن المجموعة الديناميكية تتخذ مواضع مختلفة عند تغير الزمن وهذه المواضع المختلفة عند أي لحظة زمنية معينة ما نركز عليه تحت شروط ابتدائية معينة. ويتعين موضع المجموعة الديناميكية عند أي لحظة بعدد المتغيرات أو الإحداثيات مثل  $(x, y, z)$  أو  $(r, \theta, \phi)$  أو  $(\rho, \phi, z)$  وإذا كان جسيमान ستكون ستة وهكذا ... إذا كان هناك  $N$  جسيم فإن عدد المتغيرات هي  $3N$ .

وقد أدخل لاجرانج مفهوم الإحداثيات المعممة بأسلوب عام لتعيين موضع المجموعة الديناميكية بدون التعرض لنوع الإحداثيات وتصنف المجموعات الديناميكية إلى نوعين إحداها حرة لا توجد قيود على الحركة والأخرى مقيدة.

ونظراً لأن الحركة للمجموعة الديناميكية تخضع لأنواع مختلفة من القيود فإن المجموعة الديناميكية تصنف طبقاً لنوع القيود .

## ٢-١ القيود وأنواعها Constraints

المجموعة الديناميكية قد تكون حرة أي بدون أي قيود عليها مثل حركة جسيم مقذوف من نقطة على سطح الأرض تحت تأثير الجاذبية. وهناك مجموعة ديناميكية مقيدة وهي التي يكون هناك قيود معينة تؤدي أن يكون هناك شروط على مواضع وسرعة جسيمات المجموعة.

والقيود هو عبارة عن معادلة متغيراتها هي الإحداثيات المستقلة حيث أن القيد شرط أو شروط مفروضة على المنظومة الديناميكية.

يمكن تقسيم القيود إلى نوعين فإذا كان متجه الموضع هو  $\vec{r}_\alpha$  للجسيم  $\alpha$  وسرعته  $\dot{\vec{r}}_\alpha$  من الجسيمات حيث  $\alpha = 1, 2, \dots, N$  فيمكن التعبير عن الشروط أو القيود في الصورة :

$$f(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha, t) = 0$$

والتي تسمى معادلة القيد ومعنى ذلك أن مواضع وسرعات الجسيمات لا تأخذ إلا قيماً معينة تحقق وتتفق مع هذه العلاقة المعطاة. ومن ثم سوف نصنف القيود تبعاً لما يلي :

أ. قيود تفاضلية (أو كينماتيكية) Differential (or Kinematical constraints)

إذا كانت معادلة القيد التفاضلي في الصورة

$$f(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha, t) = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

ظهور السرعات  $\dot{\vec{r}}_\alpha$  صراحة في معادلة القيد سمي بالقيد الكينماتيكي والذي يمكن تحويله إلى نوع آخر من القيود إذا أمكن تكامل معادلة القيد. والذي سنسميه بالقيد الهندسي وسميت أيضاً المجموعة بالمجموعة الديناميكية الهولونومية Holonomic. أما إذا كان معادلة القيد غير قابلة للتكامل فنسمي المجموعة بالمجموعة الديناميكية غير الهولونومية.

ب - القيود الهندسية Geometric Constrains

معادلة القيد في الصورة :

$$f(\vec{r}_\alpha, t) = 0$$

وهنا في معادلة القيد لا تظهر السرعة صراحة وتسمى المجموعة Holonomic هولونومية. مثال ذلك حركة خرزة مقيد الحركة على منحني قطع مكافئ حيث إن الخرزة تتحرك في مستوى فيكون لها إحداثيين معتمدين  $x, y$  أي درجتان حرية ولوجود القيد الهندسي (معادلة القطع  $y^2 = 4ax$ ) فإن درجتي الحرية تقل بمقدار درجة ويلاحظ وجود ارتباط بين القيود وبعضها البعض حيث أن القيد الهندسي معطى بالمعادلة السابقة ويعبر عنه بمتجهات موضع عناصر المنظومة. والقيد التفاضلي يمكن

الحصول عليه من القيد الهندسي بتفاضل القيد الهندسي والعكس قد يكون صحيح أو لا يكون.

### ❖ القيد المستقر زمنياً :

إذا لم يظهر الزمن  $t$  صراحة في معادلة القيد سمي بالقيد المستقر زمنياً وسميت المجموعة الديناميكية بالمجموعة الاسكليروثومية Scleronomic.

### ❖ القيد غير المستقر زمنياً :

(إذا ظهر الزمن  $t$  صراحة) سمي القيد بالقيد غير المستقر زمنياً وسميت المجموعة بالمجموعة الديناميكية الريونومية Rheonomic.

## ٣-١ أنواع الأنظمة الميكانيكية كما سبق ملخصها فيما يلي :

### ١-٣-١ الأنظمة الهولونومية Holonomic system

أنظمة ميكانيكية مفروض عليها قيود هندسية أو تفاضلية يمكن تكاملها أو الاثنين معاً وتكون الإحداثيات المعممة مستقلة والأنظمة المفروض عليها قيود هندسية فقط تكون هولونومية.

### ٢-٣-١ الأنظمة غير الهولونومية

أنظمة مفروض عليها قيود لا يمكن تكاملها.

### ٣-٣-١ الأنظمة الزمنية وغير الزمنية

الأنظمة التي يظهر الزمن صراحة سميت زمنية والتي لا يظهر الزمن صراحة سميت غير زمنية.

### ٤-٣-١ أنظمة تامة القيد وغير تامة القيد

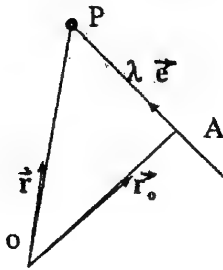
يقال أن المنظومة تامة القيد عندما يمكن التعبير عن جميع القيود المفروضة على المنظومة بمعادلات في الصورة  $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$  أو صورة مكافئة وإلا يقال أنها غير تامة القيد.

مثال ١:

جسيم يتحرك على سلك مستقيم ثابت في الفراغ. أوجد معادلة القيد

الحل

شكل (١ - ٢)



بفرض أن  $\vec{e}$  متجه الوحدة في اتجاه السلك، A نقطة ثابتة متجه موضعها  $\vec{r}_0$  فإن متجه موضع الجسيم المتحرك على السلك يكون:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{e}$$

حيث  $\lambda$  هي بارامتر ويمثل الطول من A إلى الموضع العام للجسيم.

وبذلك يمكن اعتبار معادلة القيد كالتالي:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 - \lambda \vec{e} = 0$$

وهذا القيد هو قيد هندسي وهو مستقر زمنياً وبذلك تكون المجموعة هولونومية أسكليرونومية.

مثال ٢:

يتحرك جسيमान يصل بينهما قضيب طوله ثابت  $a$  في مستوى وبحيث تكون سرعة منتصف القضيب دائماً في اتجاه الخط الواصل بين الجسيمين. أوجد معادلة القيد ونوعه.

الحل

إحداثيات منتصف القضيب هي:

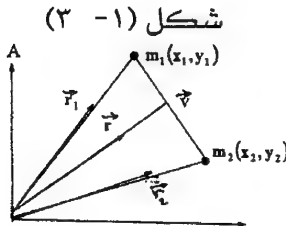
$$\vec{r} \equiv \{(x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2\}$$

$$\equiv (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$$

وبذلك تكون سرعة منتصف القضيب هي  $\dot{\vec{r}}$  تعطى من:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2}{2}$$

$$= \left( \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}, \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2} \right) \quad (1)$$



لدينا طول القضيب  $a$  ثابت فيكون:

$$a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (2)$$

∴ سرعة منتصف القضيب في اتجاه الخط الواصل بين الجسمين فيكون

ميل السرعة = ميل القضيب

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\dot{y}_2 + \dot{y}_1}{\dot{x}_2 + \dot{x}_1} \quad (3)$$

بالتعويض في (2) نحصل على

$$\frac{a^2}{(x_1 - x_2)^2} = 1 + \left( \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2 = 1 + \left( \frac{\dot{y}_2 + \dot{y}_1}{\dot{x}_2 + \dot{x}_1} \right)^2$$

لذلك تكون معادلة القيد

$$1 + \left( \frac{\dot{y}_2 + \dot{y}_1}{\dot{x}_2 + \dot{x}_1} \right)^2 - \frac{a^2}{(x_1 - x_2)^2} = 0$$

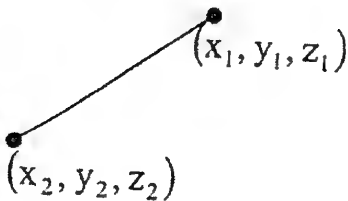
وهي معادلة القيد وأنه مستقر زمنياً لا يمكن تكامله ومن ثم فهو كينماتيكي والمجموعة سكليرونومية وغير هولونومية.

### مثال ٣:

جسيمان متصلان بساق خفيفة ذات طول ثابت  $a$  • أوجد معادلة القيد

#### الحل

شكل (١ - ٤)



معادلة القيد تكون

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = a^2$$

وهي مجموعة هولونومية - سكليرونومية

أما إذا كانت طول الساق تتغير مع الزمن بحيث

تكون  $b \cos \omega t$  فإن معادلة القيد تصبح:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = b^2 \cos^2 \omega t$$

وهي مجموعة هولونومية - ريونومية.

#### مثال ٤:

في كل من الحالات التالية، اذكر هل التقييد تام أم غير تام وبين سبب اجابتك .  
 أ - خرزة تتحرك على سلك دائري . ب - جسيم ينزلق إلى أسفل مستوى مائل تحت تأثير الجاذبية الأرضية . ج - جسيم ينزلق إلى أسفل كرة من نقطة بالقرب من القمة تحت تأثير الجاذبية الأرضية .

#### الحل

- أ - في حالة خرزة تتحرك على سلك دائري يكون التقييد تام ، وذلك لأن الخرزة التي يمكن اعتبارها نقطة مادية أو جسيما تكون مقيدة الحركة على سطح السلك الدائري .  
 ب - في حالة جسيم ينزلق إلى أسفل مستوى مائل تحت تأثير الجاذبية الأرضية يكون التقييد تام ، وذلك لأن الجسيم يكون مجبرا على الحركة على سطح، والسطح في هذه الحالة مستوى .  
 ج - في حالة جسيم ينزلق إلى أسفل كرة من نقطة بالقرب من القمة تحت تأثير الجاذبية الأرضية يكون التقييد غير تام ، وذلك لأن الجسيم بعد أن يصل إلى موضع معين على الكرة سوف يتركها . ويمكن معرفة ذلك بطريقة أخرى، إذا لاحظنا أنه إذا كان  $\vec{r}$  هو متجه الموضع للجسيم بالنسبة لمركز الكرة لنقطة أصل، وكان  $a$  هونصف قطر الكرة، فإن الجسيم يتحرك تحت شرط  $r^2 \geq a^2$  وهذه حالة تقييد غير تام وذلك لأن هذه الحالة لا تتبع معادلة التقييد التام وهي:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

أما حالة التقييد التام يجب أن يكون  $r^2 = a^2$

#### مثال ٥:

- في كل من الحالات التالية بين ما إذا كان تقييد الحركة تاما أو غير تاما وضحا السبب .  
 أ - جسيم مقيد الحركة تحت تأثير الجاذبية الأرضية على السطح الداخلي لمجسم قطع مكافئ دوراني رأسه إلى أسفل . ب - كرة تتدحرج ويمكن أن تنزلق إلى أسفل سطح مائل . ج - جسيم ينزلق تحت تأثير الجاذبية الأرضية على السطح الخارجي لمخروط رأسي مقلوب . د - كرة تتدحرج إلى أسفل على مستوى رأسي مثبت . هـ - جسيم ينزلق على مجسم القطع الناقص تحت تأثير الجاذبية الأرضية .

### الحل

- سوف نذكر في كل الحالات حالة التقيد وعلى الطالب أن يذكر السبب:
- أ- في حالة جسيم مقيد الحركة تحت تأثير الجاذبية الأرضية على السطح الداخلي لجسم قطع مكافئ دوراني رأسه إلى أسفل التقيد تام.
  - ب- في حالة كرة تتدحرج إلى أسفل على مستوى رأسي مثبت التقيد تام.
  - ج- في حالة جسيم ينزلق تحت تأثير الجاذبية الأرضية على السطح الخارجي لمخروط رأسي مقلوب التقيد تام.
  - د- في حالة كرة تتدحرج ويمكن أن تنزلق إلى أسفل سطح مائل التقيد غير تام.
  - هـ- في حالة جسيم ينزلق على مجسم القطع الناقص تحت تأثير الجاذبية الأرضية التقيد غير تام.

### ٤.١ الإحداثيات المعممة: Generalized coordinates

رأينا أن موضع الجسيم في الفضاء (الفراغ) يمكن تعيينه تعيينا كاملا بثلاثة إحداثيات. وقد تكون هذه، ديكارتية (كارتيزية) أو كروية أو أسطوانية أو في الحقيقة أية ثلاثة بارامترات مختارة بصورة ملائمة، ونحتاج إلى إحداثيين فقط إذا كان الجسيم مقيد الحركة في مستو أو سطح ثابت. بينما إذا كان الجسيم يتحرك على خط مستقيم أو منحني ثابت فعندئذ يكفي إحداثي واحد.

في حالة منظومة ميكانيكية متكونة من  $N$  من الجسيمات نحتاج إلى  $3N$  من الإحداثيات لتعيين مواضع جميع الجسيمات في وقت واحد بصورة كاملة. ومعنى هذا أن موضع المجموعة الميكانيكية يتحدد إذا علم  $3N$  من الكميات القياسية المستقلة والتي تسمى إحداثيات معممة وسوف نرمز لهذه الإحداثيات بالرموز:  $q_1, q_2, \dots, q_n$  وقد يكون الإحداثي  $q_k$  زاوية أو مسافة.

### ٥-١ معادلات التحويل بين الإحداثيات:

إذا كان  $\vec{r}_i$  هو متجه موضع الجسيم رقم  $i$  في مجموعة ميكانيكية مكونة من  $N$  من النقاط المادية. فيمكن كتابة متجه الموضع  $\vec{r}_i$  بالنسبة لمجموعة المحاور الكرتيزية  $xyz$  كالتالي:

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (1)$$

حيث  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  هي متجهات الوحدة في اتجاه المحاور الثلاثة المتعامدة.

وإذا رمزنا للإحداثيات المعممة بالرمز:

$$q_1, q_2, \dots, q_n \quad (2)$$

فإن علاقات التحويل بين الإحداثيات الكرتيزية  $x_i, y_i, z_i$  في الإحداثيات المعممة المذكورة في (2) يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

حيث  $t$  يمثل الزمن ويمكن كتابة (3) في صيغة اتجاهيه على الصورة:

$$\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (4)$$

أو أكثر اختصارا على الصورة:

$$\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_\alpha, t) \quad (5)$$

$$v = 1, 2, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

### مثال ١:

ما هي مجموعة الإحداثيات المعممة التي تحدد تحديدا كاملا حركة (خرزة) مقيدة الحركة على سلك دائري.

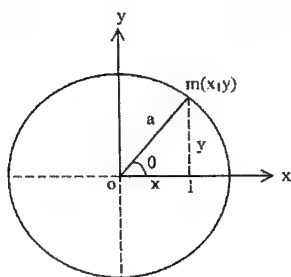
### الحل

نفرض أن السلك الدائري كما بالرسم يقع في المستوى  $xy$ . ونفرض أن الخرزة التي تتحرك على السلك الدائري كتلتها  $m$  وأنها عند أي لحظة زمنية  $t$  إحداثياتها هي  $x, y$ . وعلى ذلك تصبح معادلات التحويل هي على الصورة:

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta$$

حيث  $a$  نصف قطر السلك الدائري. وعلى ذلك

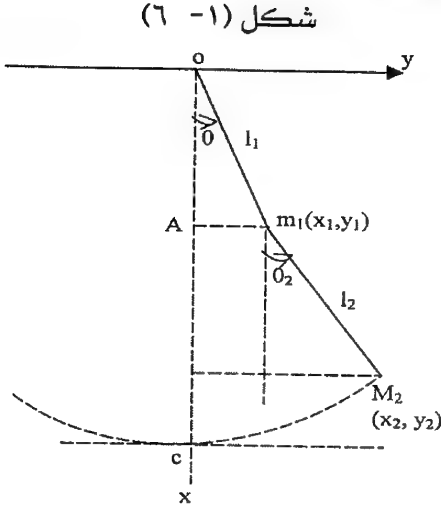
يمكن تحديد الحركة تحديدا تاما باستخدام الإحداثي المعمم  $\theta$ .



### مثال ٢:

ما هي مجموعة الإحداثيات المعممة التي تحدد تحديدا كاملا حركة كتلتين في بندول مزدوج مقيد الحركة في مستوى. ثم أكتب معادلات التحويل:

### الحل



شكل (١ - ٦)

البندول المزدوج (لكتلتين) ومقيد الحركة في مستوى يمكن رسمه على الصورة المبينة بالشكل المجاور.

واضح من الرسم أن الإحداثيان  $\theta_1, \theta_2$  يحددان تحديدا كاملا موضعي الكتلتين  $m_1, m_2$ . إذن يمكن اعتبار  $\theta_1, \theta_2$  هما الإحداثيين المعممين المطلوبين.

### كتابة معادلات التحويل:

يمكن اختيار مجموعة المحاور oxy كما هو مبين بالرسم ونفرض أن:  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  هما الإحداثيات الكرتيزية لكل من  $m_1, m_2$  على الترتيب. عندئذ نرى من شكل (١ - ٦) أن:

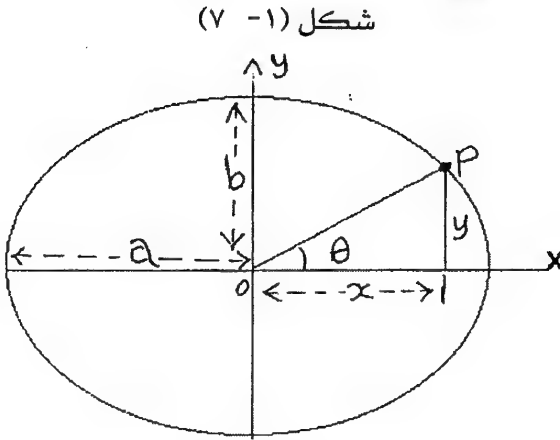
$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \theta_1, & y_1 &= l_1 \sin \theta_1, \\ x_2 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2, \\ y_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, \end{aligned}$$

وهذه هي معادلات التحويل المطلوبة.

### مثال ٣:

ما هي مجموعة الإحداثيات المعممة التي تحدد تحديدا كاملا حركة جسيم مقيد الحركة على قطع ناقص.

### الحل



نفرض أن القطع الناقص  
في المستوى  $oxy$  كما في  
الرسم. ونفرض أن الجسم  
الذي يتحرك على القطع  
الناقص له كتلة  $m$  وأنه على  
أي لحظة زمنية  $t$  إحداثياته  
الكرتيزية هي  $x, y$  وعلى  
ذلك تصبح معادلتى التحويل  
هي:

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta$$

وعلى ذلك يمكننا تحديد الحركة تحديدا تاما باستخدام الإحداثي المعمم  $\theta$ .

### ٦-١ السرعات المعممة : Generalized Velocities

السرعات المعممة هي المعدلات الزمنية للإحداثيات المعممة وعددها يساوي  
عدد الإحداثيات المعممة تساوي عدد درجات الحرية أي أن:

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n$$

$$\text{or } \dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

### ٧-١ درجات الحرية للمجموعة : Degrees of freedom

هي عدد الازاحات الافتراضية (الازاحات التفاضلية) المستقلة والتي تتفق مع  
القيود المفروضة أو هي عدد الإحداثيات المعممة (إحداثيات مستقلة) اللازمة لتعيين  
موضع الجسم.

فمثلاً : حركة جسيم في خط مستقيم درجة حرية واحدة  $q_1 = x$  لتحديد موضعه.

ويلاحظ إذا وجدت قيود فإنها تقلل عدد درجات الحرية.

حركة جسيم في مستو له درجتان حرية:

$$q_1 = x, q_2 = y \quad \text{أو} \quad q_1 = r, q_2 = \theta, \dots$$

وفي الفراغ له ثلاث درجات حرية وهكذا ، فمنظومة تتكون من  $N$  جسيم يكون لها  $3N$  درجات حرية.

ودرجات الحرية قد تكون مسافات أو زوايا أو كميات أخرى لها علاقة بالمسافات والزوايا. فإذا كان هناك  $m$  قيد فإن عدد درجات الحرية  $= 3N - m$ .

فمثلا عندما يتحرك جسيم بحرية في الفراغ فإنه يلزم ثلاث إحداثيات مثل  $(x, y, z)$  وذلك لتحديد موضعه وبذلك يكون عدد درجات الحرية هو ثلاث درجات. وعلى ذلك نجد أنه يمكن كتابة الإحداثيات الكرتيزية كدوال للإحداثيات المعممة على النحو التالي:

$$x = x(q_1, q_2, q_3),$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3),$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3).$$

وإذا كان الجسيم يتحرك على سطح أو في مستوى فتكون له درجتا حرية فقط ونجد أن:

$$x = x(q_1, q_2)$$

$$y = y(q_1, q_2)$$

وإذا كان الجسيم يتحرك على منحنى أو في خط مستقيم فتكون له درجة حرية واحدة ويكون:

$$x = x(q)$$

#### مثال ٤:

مجموعة تتكون من  $N$  جسيما تتحرك بحرية في الفراغ ويلزمها  $3N$  إحداثيات لتحديد موضعها وبذلك يكون عدد درجات الطاقة هو  $3N$ .

#### الحل

الجسم الجاسئ الذي يستطيع الحركة بحرية في الفراغ له 6 درجات طلاقة أي 6 إحداثيات مطلوبة لتحديد الموضع.

مثال ٥:

حدد عدد درجات الطلاقة في كل من الحالات الآتية:

- أ- جسيم يتحرك على منحنى فراغي معين. ب- ٥ جسيمات تتحرك بحرية في مستوى.  
ج- ٥ جسيمات تتحرك بحرية في الفراغ. د- جسيمن موصولان بواسطة قضيب جاسئ يتحرك بحرية في مستوى.

الحل

- (أ) يمكن وصف المنحنى بالمعادلات البارامترية  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$  حيث  $s$  هو البارامتر. عندئذ يحدد موضع الجسيم على المنحنى بواسطة إحداثي واحد معين. وبذلك توجد درجة طلاقة واحدة.  
(ب) كل جسيم يتطلب إحداثيين لتحديد موضعه في المستوى وبذلك يلزم  $5 \times 2 = 10$  إحداثيات لتحديد مواضع جميع الجسيمات الـ 5 أي أن المجموعة لها 10 درجات طلاقة.  
(ج) بما أن كل جسيم يلزمه 3 إحداثيات لتحديد موضعه فإن المجموعة يكون لها  $3 \times 5 = 15$  درجة طلاقة.

الطريقة الأولى:

يمكن التعبير عن إحداثيات جسيمين بواسطة  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  أي بعدد 4 إحداثيات ولكن حيث أن المسافة بين هاتين النقطتين تكون ثابتة  $a$  (طول القضيب الجاسئ) فإن  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2$  وينتج أنه يمكن التعبير عن درجة طلاقة معينة بدلالة أخرى بناء على ذلك يوجد  $4 - 1 = 3$  درجات طلاقة.

الطريقة الثانية:

تكون الحركة معروفة تماما إذا حددنا إحداثيين لمركز الكتلة والزاوية التي يصنعها القضيب مع اتجاه معين. وبذلك يكون لدينا  $2 + 1 = 3$  درجات طلاقة.

مثال ٦:

أوجد عدد درجات الطلاقة لجسم جاسئ: (أ) يمكنه أن يتحرك بحرية في فراغ ثلاثي الأبعاد. (ب) لديه نقطة مثبتة ولكنه يمكن أن يدور حولها في الفراغ.

## الحل

### ❖ الطريقة الأولى:

إذا كانت هناك ٣ نقط من الجسم الجاسئ مثبتة في الفراغ ولا تقع في مستوى واحد فإن الجسم الجاسئ يكون أيضا مثبتا في الفراغ. اعتبر أن إحداثيات هذه النقط على التوالي هي  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$  أي أن عددها الكلي 9. وحيث أن الجسم جاسئ فإنه يجب أن تكون لدينا هذه العلاقات.

$$\text{ثابت} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$\text{ثابت} = (x_2 - x_3)^2 + (y_3 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2$$

$$\text{ثابت} = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2$$

أي أنه يمكن التعبير عن ثلاثة إحداثيات بدلالة الـ ٦ الباقية . وبذلك يلزم ٦ إحداثيات مستقلة لكي توصف الحركة أي أن هناك ٦ درجات طلاقة.

### ❖ الطريقة الثانية:

(أ) يلزم 3 إحداثيات لكي تثبت نقطة واحدة من الجسم الجاسئ المحور المار بهذه النقطة يكون مثبتا إذا حددنا نسبتي لجيوب تمام اتجاه هذا المحور. ويمكن عندئذ وصف الدوران حول المحور بواسطة إحداثي زاوي واحد ويكون العدد الكلي للإحداثيات المطلوبة أي عدد درجات الطلاقة هو  $3+2+1=6$ .

(ب) يمكن وصف الحركة تماما إذا علمنا إحداثيات نقطتين مثلا  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  حيث تؤخذ النقطة المثبتة عند نقطة أصل مجموعة الإحداثيات ولكن حيث أن الجسم يكون جاسئ يجب أن يكون لدينا:

$$\text{ثابت} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$\text{ثابت} = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

$$\text{ثابت} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

ومنها يمكن إيجاد 3 إحداثيات بدلالة الـ 3 الباقية. وبذلك يكون هناك 3 درجات طلاقة.

### ٩-١ الإزاحات الصغيرة في الإحداثيات:

لنفرض أن الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  تتغير من القيم الابتدائية  $(q_1, q_2, \dots)$  إلى القيم المجاورة  $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots)$  فالتغيرات التي تقابلها في الإحداثيات الكرتيزية هي كما يلي:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots$$

وهكذا المشتقات الجزئية  $\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_2}, \dots$  نجد أنها دوال للإحداثيات  $q_s$ . وكمثال خاص لنفرض حركة جسيم في مستوى، ولنختار المحاور القطبية:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta$$

وعندئذ:

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta,$$

$$y = y(r, \theta) = r \sin \theta$$

وعلى ذلك نجد أن:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r} \delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta = \cos \theta \delta r - r \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r} \delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \delta \theta = \sin \theta \delta r + r \cos \theta \delta \theta$$

والعلاقات السابقة واضح أنها تعطى التغيرات في  $x, y$  الناتجة عن تغيرات صغيرة في  $r, \theta$ .  
وكتعميم لذلك نفرض أن منظومة أو مجموعة تتكون من عدد كبير من الجسيمات، لنفرض أن هذه المجموعة لها  $n$  درجات حرية واحداثياتها المعممة لتكن  $q_1, q_2, \dots, q_n$  عندئذ فهي تتغير من الإحداثيات  $q_1, q_2, \dots, q_n$

إلى الإحداثيات المجاورة :

$(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n)$  فيتحرك الجسيم من نقطة مثل  $(x_i, y_i, z_i)$  إلى النقطة المجاورة التي تبعد بمسافة صغيرة عنها وعلى ذلك تكون احداثياتها  $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$  حيث:

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta y_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

وواضح أيضا أن المشتقات الجزئية هي دوال للإحداثيات  $q_\alpha$  وسوف نستخدم الاصطلاح الذي يلزم الرمز  $v$  ليشير إلى المحاور الكرتيزية والحرف  $\alpha$  ليشير إلى الإحداثيات المعممة.

$$\delta \vec{r}_v = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad \text{وعموما يكون:}$$

### ١٠-١ القوى المعممة: Generalized Forces

إذا وقع جسيم تحت تأثير إزاحة  $\delta \vec{r}$  تحت تأثير قوة  $\vec{F}$  فإننا نعلم أن الشغل  $\delta w$  المبذول (المنجز) من القوة عندئذ يكون:

$$\delta w = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

حيث الشغل دالة في الإحداثيات المعممة أي أن:

$$\delta w = \delta w(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

والتي يمكن أن تكتب في الصورة المختصرة التالية:

$$\delta w = \sum_v F_v \delta r_v \quad (1)$$

والعلاقة السابقة تصح كذلك لمجموعة متكونة من عدد كبير من الجسيمات فلجسيم واحد تأخذ  $v$  القيم من واحد إلى ثلاثة وتمتد  $v$  إلى  $N$  من الجسيمات من واحد إلى  $3N$ .

لتعبر الآن عن الزيادة  $\delta r_v$  بدلالة المحاور المعممة فنجد أن:

$$\delta w = \sum_v \left( F_v \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial r_v}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$\delta W = \sum_{\alpha} \left( \sum_v^{3N} F_v \frac{\partial x_v}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha}$$

والتي يمكن وضعها على الصورة التالية:

$$\delta W = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \delta q_{\alpha} \quad (2)$$

حيث:

$$Q_{\alpha} = \sum_i F_v \frac{\partial r_v}{\partial q_{\alpha}} \quad (3)$$

الكمية  $Q_{\alpha}$  المعرفة بالمعادلة (٣) تسمى بالقوة المعممة المرافقة للإحداثي  $q_{\alpha}$

### ١-١ طاقة الحركة T وكمية الحركة المعممة P

بفرض أن كتلة الجسيم رقم  $v$  هي  $m_v$  والتي تؤثر عليه قوة  $\vec{F}_v$  فإذا كان

متجه موضع الجسيم عند أي لحظة زمنية  $t$  هي :

$$\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, \dots, q_{\alpha}, t)$$

وحيث أن طاقة الحركة  $T$  تعطى من  $T = \frac{1}{2} m \dot{r}_v^2$  (للجسيم  $v$ ) فإن طاقة

الحركة للمنظومة المكونة من  $N$  جسيم والتي له الجسيم رقم  $v$  فيها)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{r}_v^2$$

مما سبق

$$\vec{\dot{r}}_v = \sum \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t}$$

وهذه المعادلة تعطي سرعة الجسيم  $v$  عند اللحظة  $t$

$$2T = m_v (\vec{\dot{r}}_v \cdot \vec{\dot{r}}_v)$$

$$\begin{aligned} \therefore 2T = m \left[ \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left( \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_{\beta}} \right) \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} \right. \\ \left. + 2 \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_{\alpha}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \right) \dot{q}_{\alpha} + \left( \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

وإذا كانت  $\vec{r}_v$  لا تعتمد على  $t$  صراحة فإن :

$$2T = \sum \sum A_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

$$A_{\alpha\beta} = m_v \left( \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\beta} \right) \quad \text{حيث}$$

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad \text{وكمية الحركة تعطى من العلاقة :}$$

والتي تسمى كمية الحركة المعممة المرافقة للإحداثي  $q_\alpha$  والتي يمكن إيجادها كذلك من طاقة الحركة

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \dot{\vec{r}}_v^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_{v=1}^N m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_v}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$$

### يجب تذكر الآتي :

$$m_v \ddot{\vec{r}}_v = \vec{F}_v$$

معادلات الحركة من قانون نيوتن الثاني:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

طاقة الحركة في الإحداثيات الكارتيزية:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\phi})^2 + \dot{z}^2)$$

طاقة الحركة في الإحداثيات الأسطوانية:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2 + (r \sin \theta \dot{\phi})^2)$$

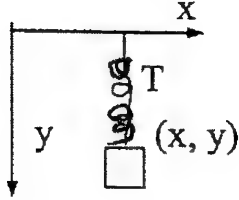
طاقة الحركة في الإحداثيات الكروية:

### مثال ٧:

جسيم كتلته  $m$  مربوط في زنبرك رأسي ثابت أوجد القوى المعممة.

### الحل

شكل (١ - ٨)



القوى المؤثرة على الجسم هي الشد  $T$  إلى أعلى، والوزن  $mg$  رأسياً لأسفل.

$$\therefore \vec{F}_1 = -T\vec{j}, \vec{F}_2 = mg\vec{j}$$

متجهات مواضع القوى هي:

$$\vec{r}_{1,2} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

باستخدام القوى المعممة والشغل المبذول:

$$Q_v = \frac{\delta W}{\delta q_v} \quad \text{where} \quad \delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

$$\therefore \delta W = (-T + mg)\vec{j} \cdot (\delta x\vec{i} + \delta y\vec{j}) = (-T + mg)\delta y$$

$$Q_y = -T + mg, \quad Q_x = 0$$

ويمكن كذلك إيجاد نفس النتيجة وذلك بالتعويض في القانون:

$$Q_\alpha = \sum F_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$$

والإحداثي الوحيد المعمم هو  $y$  لذلك توجد قوى معممة واحدة.

$$Q_\alpha = F_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial y} = (-T + mg) \frac{\delta y}{\delta y} = -T + mg$$

### مثال ٨:

تتحرك خرزة كتلتها  $m$  على سلك على هيئة قطع مكافئ معادلته  $z = 0$ ،  $y = 16x^2$ . احسب القوى المعممة.

### الحل

من تعريف القوى المعممة:  $Q_v = \sum F_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_v}$  وكذلك نلاحظ أن:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + 16x^2\vec{j}$$

أي لا يوجد إلا إحداثي معمم واحد لذلك توجد قوى معممة واحدة هي

$$Q_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (-mg\vec{j}) \cdot (\vec{i} + 32x\vec{j}) = -32mgx$$

حل آخر : من الشغل الافتراضي

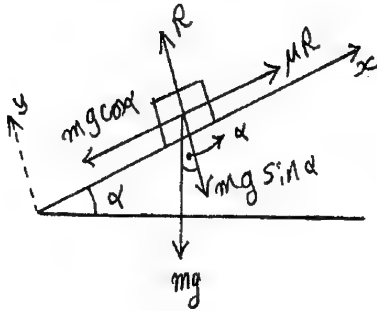
$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot \delta \vec{r} \\ &= (-mg\vec{j}) \cdot (\delta x\vec{i} + 32x\delta x\vec{j}) = 32mgx\delta x \\ Q_x &= \frac{\delta W}{\delta x} = -32mgx, \quad Q_y = Q_z = 0 \end{aligned}$$

### مثال ٩:

جسيم كتلته  $m$  يتحرك إلى أسفل مستوى مائل يميل على الأفقي بزاوية  $\alpha = 30^\circ$  إذا علم أن معامل الإجهاد  $\mu = 0.2$  أوجد القوى المعممة للجسيم.

### الحل

شكل (٩ - ١)



نفرض أن الجسيم في وضع عام على بعد  $x$  من  $O$  ومحور  $x$  منطبق مع خط أكبر ميل والمحور  $y$  عمودي عليه. لاحظ أن هنا إحداثي معموم واحد هو  $x$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (R \cos \alpha - \mu R)\vec{i} \\ &\quad + (R - mg \sin \alpha)\vec{j} \\ \vec{r} &= x\vec{i}, \quad \delta \vec{r} = \delta x\vec{i} \end{aligned}$$

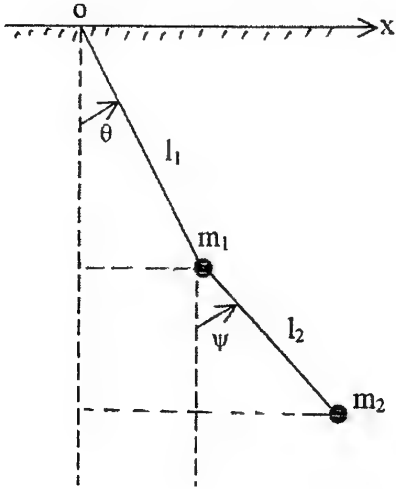
$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = (R \cos \alpha - \mu R) \delta x \\ \therefore Q_x &= R \cos \alpha - \mu R \end{aligned}$$

### مثال ١٠:

يتكون البندول المزدوج من كتلتان  $m_1, m_2$  متصلتان ببعضهما بقضيب خفيف طوله  $l_2$  وتتصل  $m_1$  بقضيب آخر طوله  $l_1$  ويمكن للطرف الآخر لهذا القضيب الحركة بحرية حول نقطة ثابتة  $O$  بمفصل أملس وتتحرك المجموعة بحرية كاملة في مستوى رأسي. أوجد قوى العموم لهذه المنظومة.

### الحل

شكل (١ - ١١)



نختار النقطة الثابتة  $O$  كنقطة أصل، والمحور الأفقي  $Ox$  والمحور الرأسى لأسفل هو  $Oy$  حيث يكون المستوى  $Oxy$  هو المستوى الذي يتحرك فيه البندول المزدوج. يلاحظ أن للمجموعة أربعة معادلات قيود هندسية وبذلك يوجد احداثيان عموم اثنين فقط ويمكن اختيارهما الزاويتين للقضيبين

مع الرأسى، أي أنهما إحداثيات كرتيزية، بينما توجد:

$$q_1 = \phi, \quad q_2 = \psi \quad (1)$$

والقوى المؤثرة على الكتلتين هما:

$$\vec{F}_1 = m_1 g \vec{j}, \quad \vec{F}_2 = m_2 g \vec{j} \quad (2)$$

ويجب ملاحظة أن هاتين القوتين ليستا مصاحبتين لإحداثيات العموم  $q_1, q_2$  ولكنهما مصاحبتين لمتجهى الموضع  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  حيث:

$$\vec{r}_1 = l_1 \sin \phi \vec{i} + l_1 \cos \phi \vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + l_2 \sin \psi \vec{i} + l_2 \cos \psi \vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = (l_1 \sin \phi + l_2 \sin \psi) \vec{i} + (l_1 \cos \phi + l_2 \cos \psi) \vec{j}$$

والآن يمكن من المعادلة السابقة إيجاد قوى العموم بطريقتين كالتالي:

❖ الطريقة الأولى:

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (4)$$

ومنها نجد أن:

$$Q_\phi = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \phi} = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \phi} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \phi} \quad (5)$$

$$= m_1 g \vec{j} \cdot (+\ell_1 \cos \phi \vec{i} - \ell_1 \sin \phi \vec{j}) \\ + m_2 g \vec{j} \cdot [+ \ell_1 \cos \phi \vec{i} - \ell_1 \sin \phi \vec{j}] \\ = -(m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \phi$$

$$Q_\psi = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \psi} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \psi} \\ = m_1 g \vec{j} \cdot (0) + m_2 g \vec{j} \cdot (+\ell_2 \cos \psi \vec{i} - \ell_2 \sin \psi \vec{j}) \\ = -m_2 g \ell_2 \sin \psi$$

### ❖ الطريقة الثانية:

نظرا لأن البندول المزدوج يمثل مجموعة محافظة (لأن  $\text{curl } \vec{F} = \vec{0}$ ) وعلى ذلك يمكن تعيين القوى المعممة  $Q_\phi, Q_\psi$  من دالة جهد  $V$  والتي إذا قيست من المستوى الأفقي الذي يمر بالنقطة الثابتة  $O$  نجد أنه يمكن كتابتها على الصورة:

$$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 \\ = -m_1 g (\ell_1 \cos \phi) - m_2 g (\ell_1 \cos \phi + \ell_2 \cos \psi) \\ = -(m_1 + m_2) g \ell_1 \cos \phi - m_2 g \ell_2 \cos \psi$$

$$Q_\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} = -(m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \phi$$

$$Q_\psi = -\frac{\partial V}{\partial \psi} = -m_2 g \ell_2 \sin \psi$$

وكذلك يمكن في هذه الطريقة إيجاد القوى الكرتيزية كالتالي:

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 V = m_1 g \vec{j}, \quad \vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_2 V = m_2 g \vec{j}$$

### ١٢-١ تقسيم المجموعات الميكانيكية:

يمكن تقسيم المجموعات الميكانيكية على أنها: أ- مجموعات محافظة أو غير محافظة ب- مجموعات زمنية أو غير زمنية ج- مجموعات تامة التقييد أو غير تامة التقييد.

### أولاً: المجموعات المحافظة والمجموعات الغير محافظة:

إذا كانت **جميع القوى المؤثرة** على مجموعة جسيمات يمكن اشتقاقها من دالة جهد (أو طاقة جهد) فإن المجموعة تسمى مجموعة محافظة وهذا يعبر عنه رياضياً كالتالي:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\text{grad } V \quad (1)$$

وفيما عدا ذلك تكون المجموعة غير محافظة.

وبأخذ دوران الطرفين في المعادلة (١) نجد أن:

$$\text{curl } \vec{F} = -\text{curl grad } V \Rightarrow \text{curl } \vec{F} = \vec{0} \quad (2)$$

أي أن إذا كانت المجموعة محافظة فيكون دوران القوة في هذه الحالة يساوى صفراً إما إذا كان دوران القوة لا يساوى صفراً فإن المجموعة تكون غير محافظة.

وهناك تعريف آخر للأنظمة المحافظة وهو:

"مجموع طاقتي الحركة وطاقة الجهد (طاقة الموضع أو الطاقة الكامنة) لأي

نظام محافظ يساوى مقدار ثابت لا يعتمد على الزمن.

ومعنى هذا أن النظام المحافظ هو نظام معزول لا يتبادل الطاقة مع المحيط،

أي لا يتأثر بالقوى الخارجية ولا يعاني قوى مبددة (مشتتة) كالاحتكاك.

ومن أجل توضيح أن تعريفي النظام المحافظ متكافآن، نأخذ جسيم واحد

يتحرك على خط مستقيم وليكن محور  $x$ . وعلى ذلك القانون الثاني لنيوتن لهذه الحالة

كالآتي:

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

ولكن من العلاقة (١) نجد أنها تصبح في هذه الحالة على الصورة:

$$F_x = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (\text{حيث هنا يكون } \nabla = \frac{d}{dx} \text{ i}) \quad (4)$$

وبالتعويض من (٤) في (٣) نحصل على:

$$-\frac{dV_{(x)}}{dx} = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

بالضرب في  $dx$  ثم إجراء التكامل نحصل على:

$$-\int dV_{(x)} = m \int dv \frac{dx}{dt}$$

$$-\int dV_{(x)} = m \int v dv$$

$$-V_{(x)} + C = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = C$$

حيث  $C$  هو ثابت التكامل، وهكذا يتضح أن مجموع طاقتي الحركة والجهود للجسيم يساوي مقداراً ثابتاً. وعندئذ يكون تعريف النظام المحافظ متكافئين.

ويلاحظ أن مجموع طاقتي الحركة والجهود يسمى أحياناً بالطاقة الكلية وإذا رمزنا لطاقة الحركة بالرمز  $T$ ، طاقة الجهود بالرمز  $V$  والطاقة الكلية بالرمز  $E$  يكون:  $E = T + V = \text{const.}$  وأحياناً يسمى هذا المبدأ "بمبدأ ثبوت الطاقة".

### مثال ١١:

أثبت أن:  $\vec{F} = (2xy + z^3)\vec{i} + x^2\vec{j} + 3xz^2\vec{k}$  هو مجال قوة محافظ. ثم أوجد دالة الجهود. ثم أوجد الشغل المبذول في إزاحة جسيم في هذا المجال من النقطة  $(1, -2, 1)$  إلى النقطة  $(3, 1, 4)$ .

### الحل:

أولاً: الشرط الضروري والكافي لكي تكون القوة محافظة هو:  $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$  أي أن:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0\vec{i} - (3z^2 - 3z^2)\vec{j} = (2x - 2x)\vec{k} = \vec{0}$$

أي أن  $\vec{F}$  هي مجال قوة محافظ.

❖ ثانياً: لتعيين دالة الجهود نتبع الآتي:  $\vec{F} = -\vec{\nabla} V_{(x,y,z)}$

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \quad (1)$$

ولكن معلوم أن:

$$\vec{F} = (2xy + z^3)\vec{i} + x^2\vec{j} + 3xz^2\vec{k} \quad (2)$$

من (٢) و (١) نحصل على:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = 2xy + z^3, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = x^2, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = 3xz^2 \quad (3)$$

بإجراء عمليات التكامل نجد أن:

$$-V = x^2y + xz^3 + f(y, z) \quad (4)$$

$$-V = x^2y + f(z, x) \quad (5)$$

$$-V = xz^3 + f(x, y) \quad (6)$$

كذلك نختار:

$$f(x, y) = x^2y + c, \quad f(z, x) = xz^3 + c, \quad f(y, z) = c$$

$$V = -(x^2y + xz^3) + c \quad \text{فتجد أن:}$$

وعندما نجعل الثابت يتلاشى أو نعتبره يساوى صفرا طبقا لشروط ابتدائية معينة فإن

$$V(x, y, z) = -(x^2y + xz^3)$$

❖ **مثال:** لتعيين الشغل لإزاحة الجسم في هذا المجال من النقطة (1, -2, 1) إلى النقطة (3, 1, 4).

$$W = - \int_C dV = - \left[ -(x^2y + xz^3) \right]_{(1, -2, 1)}^{(3, 1, 4)} = 202$$

**مثال ١٢:**

أوجد الثوابت a, b, c التي تجعل مجال القوة الآتية محافظ:

$$\vec{F} = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$$

ثم أوجد دالة الجهد المصاحبة لمجال هذه القوة.

الحل

أولا: شرط أن يكون مجال القوة محافظ هو:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x + 2y + az) & (bx - 3y - z) & (4x + cy + 2z) \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$c+1=0, \quad a-4=0, \quad b-2=0$$

إذن مجال القوة المحافظ يصبح:

$$\vec{F} = (x+2y+4z)\vec{i} + (2x-3y-z)\vec{j} + (4x-y+2z)\vec{k} \quad (1)$$

ثانياً: لتعيين الجهد أو دالة الجهد نتبع الخطوات التالية:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \quad (2)$$

من (١)، (٢) نجد أن:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = x+2y+4z \Rightarrow -V = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz + f(y,z)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = 2x-3y-z \Rightarrow -V = 2xy - \frac{3}{2}y^2 - yz + f(x,z)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = 4x-y+2z \Rightarrow -V = 4xz - yz + z^2 + f(x,y)$$

ويمكن اختيار الدوال المجهولة على الصورة:

$$f(y,z) = -\frac{3}{2}y^2 - yz + z^2 + c, \quad f(x,z) = 4xz + \frac{1}{2}x^2 + z^2 + c$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 + c$$

إذن دالة الجهد المطلوبة تصبح:

$$-V = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + z^2 + 2xy - yz + 4xz + c.$$

مثال ١٣:

أثبت أنه في المحاور القطبية  $(r, \theta)$  يكون:  $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$  حيث  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  متجهى وحدة في اتجاه الموضع  $\vec{r}$  وفى الاتجاه العمودي عليه.

الحل

لنفرض أن:

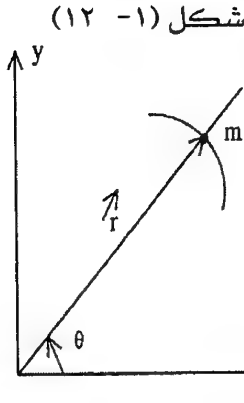
$$\vec{\nabla} V = G\vec{e}_r + H\vec{e}_\theta \quad (1)$$

والمطلوب هو تعيين  $G, H$ .

علاقة التحويل بين الإحداثيات والقطبية

$$y = r \sin \theta$$

هي:



$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

$$= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

وبالمثل

$$x = r \cos \theta$$

$$\therefore dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \quad (2)$$

$$= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} \quad (3)$$

ومن شكل (١-١٢) واضح أن:

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta, \quad \vec{j} = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \quad (4)$$

من (٢)، (٤)، (٣) نحصل على:

$$d\vec{r} = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$+ (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)(\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$$

$$d\vec{r} = \cos^2 \theta \vec{e}_r dr - r \sin^2 \theta d\theta \vec{e}_\theta + \sin^2 \theta dr \vec{e}_r + r \cos^2 \theta d\theta \vec{e}_\theta$$

$$- r \sin \theta \cos \theta d\theta \vec{e}_r - \sin \theta \cos \theta dr \vec{e}_\theta$$

$$+ r \sin \theta \cos \theta d\theta \vec{e}_r + \sin \theta \cos \theta dr \vec{e}_\theta$$

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

ولكن:

$$\vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta \quad (6)$$

بالتعويض من (١)، (٥) في (٦) نجد أن:

$$(G \vec{e}_r + H \vec{e}_\theta) \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta) = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta$$

$$G dr + H r d\theta = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta$$

$$Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

وفيها نجد أن:

$$\therefore \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad \text{وبذلك تصبح المعادلة (١) على الصورة:}$$

#### مثال ١٤:

- (١) قسم كلا من المجموعات الآتية على حسب ما إذا كانت: (i) زمنية أو غير زمنية.  
(ii) تامة التقييد أو غير تامة التقييد. (iii) محافظة أو غير محافظة.  
أ- كرة تتدحرج إلى أسفل من قمة كرة أخرى مثبتة. ب- اسطوانة تتدحرج دون انزلاق إلى أسفل مستوي مائل خشن زاويته  $\alpha$ . ج- جسيم ينزلق على السطح الداخلي لجسم مكافئ دوراني قمته إلى أسفل ومحوره رأسي ومعامل احتكاكه  $\mu$ .  
د- جسيم يتحرك على سلك لا احتكاكي طويل جدا ويدور حول محور أفقي بسرعة زاوية ثابتة.

#### الحل

(أ) في حالة كرة تتدحرج إلى أسفل من قمة كرة أخرى مثبتة تعتبر هذه الحالة مجموعة غير زمنية، وذلك لأن المعادلات لا تتضمن الزمن  $t$  بصراحة. وهي مجموعة غير تامة التقييد وذلك لأن الكرة المتحركة تترك الكرة المثبتة عند نقطة ما. وهي مجموعة محافظة لأن قوة الجاذبية التي تؤثر يمكن اشتقاقها من الجهد.

(ب) في حالة اسطوانة تتدحرج دون انزلاق إلى أسفل مستوي مائل خشن زاويته  $\alpha$  تعتبر هذه الحالة مجموعة غير زمنية وذلك لأن المعادلات لا تتضمن الزمن  $t$

بصرامة. وهي مجموعة تامة التقيد لأن معادلة التقييد هي معادلة خط أو مستوي، وهي مجموعة محافظة لأن قوة الجاذبية التي تؤثر يمكن اشتقاقها من الجهد.

(ج) وبالمثل يمكن بسهولة تحديد أنه في حالة جسيم ينزلق على السطح الداخلي لجسم مكافئ دوراني قمته إلى أسفل ومحوره رأسي ومعامل احتكاكه  $\mu$ ، أن المجموعة غير زمنية، تامة التقيد، غير محافظة (لأن قوة الاحتكاك لا يمكن اشتقاقها من الجهد).

(د) أيضا في حالة جسيم يتحرك على سلك لا احتكاكي طويل جدا ويدور حول محور أفقي بسرعة زاوية ثابتة، فإن المجموعة تكون زمنية (التقييد يتضمن الزمن  $t$  بصرامة) (تامة التقيد) معادلة التقييد هي معادلة الخط وتتضمن الزمن  $t$  بصرامة، وهي محافظة.

### تمارين

١- ما هي الإحداثيات المعممة التي تلزم لتحديد حركة كل مما يأتي تحديدا كاملا:

- (أ) خرزة مقيدة الحركة على سلك دائري.  
(ب) جسيم مقيد الحركة على كرة.  
(ج) قرص دائري يتدحرج على مستوي أفقي.  
(د) بندول مركب.  
(هـ) مخروط يتدحرج على مستوي أفقي.  
(و) آلة آتوود.

٢- أكتب معادلات التحويل لحركة بندول ثلاثي بدلالة مجموعة إحداثيات معممة مناسبة.

٣- يتحرك جسيم على السطح العلوي لجسيم مكافئ دوراني أملس معادلته هي:

$$x^2 + y^2 = cz$$

أكتب معادلات التحويل لحركة الجسيم بدلالة مجموعة مناسبة من الإحداثيات المعممة.

٤- أكتب معادلات التحويل لحركة جسيم مقيد الحركة على كرة.

٥- قسم كلا مما يأتي على حسب ما إذا كان:

- i) مجموعة زمنية أو غير زمنية. ii) مجموعة تامة التقييد أو غير تامة التقييد.  
iii) مجموعة محافظة أو غير محافظة.

أ- اسطوانة أفقية نصف قطرها  $a$  تتدحرج بداخل اسطوانة أفقية جوفاء كاملة الخشونة نصف قطرها  $b < a$ .

ب- اسطوانة تتدحرج (ويمكن أن تنزلق) إلى أسفل على مستوي مائل زاويته  $a$ .

ج- كرة تتدحرج إلى أسفل على كرة أخرى تتدحرج بدورها على مستوي أفقي بسرعة منتظمة.

د- جسيم مقيد الحركة في خط تحت تأثير قوة تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن نقطة مثبتة وقوة إخماد تتناسب مع مربع السرعة اللحظية.

٦- أثبت أنه إذا كانت معادلات التحويل تعطي من  $r_v = r_v(q_1, q_2, \dots, q_n)$  أي أنها لا تتضمن الزمن  $t$  صراحة فإن طاقة الحركة يمكن كتابتها على الصورة:

$$T = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}$$

حيث  $a_{\alpha\beta}$  دوال في  $q_{\alpha}$ . ثم ناقش الحالة السابقة ما إذا كانت معادلات التحويل تعتمد صراحة على الزمن  $t$ .

٧- إذا كان  $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda n F(x, y, z)$  حيث  $\lambda$  بارامتر فإن  $F$  تسمى "دالة متجانسة من الرتبة  $n$ " حدد أيًا من الدوال الآتية تكون متجانسة وبين الرتبة في كل حالة.

$$(i) \quad x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \quad (ب) \quad 3x - 2y + 4z$$

$$(ج) \quad xyz + 2xy + 2xz + 2yz \quad (د) \quad \frac{(x+y+z)}{x}$$

$$(هـ) \quad x^3 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (و) \quad 4 \sin xy \quad (ز) \quad \frac{(x+y+z)}{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

٨- إذا كانت  $F(x, y, z)$  دالة متجانسة من الرتبة  $n$  انظر المسألة السابقة. وأثبت أن:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = nF$$

هذه تسمى "نظرية أويلر للدوال المتجانسة" ثم عمم النتيجة التي حصلت عليها.

٩- أثبت أنه إذا كانت معادلات التحويل لا تعتمد صراحة على الزمن  $t$  وكانت  $T$  هي طاقة الحركة فإن:

$$\dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \dots + \dot{q}_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = 2T$$

هل يمكنك إثبات هذا مباشرة بدون استخدام نظرية أويلر للدوال المتجانسة.

(١٠) أثبت أن مجال القوة  $\vec{F}$  المعرفة كالتالي:

$$\vec{F} = (y^2 z^3 - 6xz^2) \vec{i} + 2xyz^3 \vec{j} + (3xy^2 z^2 - 6x^2 z) \vec{k}$$

هو مجال قوة محافظ. ثم أوجد دالة الجهد القياسية (أو طاقة الجهد).

(١١) أثبت أن مجال القوة  $\vec{F}$  المعرفة كالتالي:  $\vec{F} = -m\omega^2(x\vec{i} + y\vec{j})$  هو مجال محافظ. ثم أوجد طاقة الجهد.

(١٢) أثبت أن مجال القوة  $\vec{F}$  المعرفة كالتالي:  $\vec{F} = x^2 yz \vec{i} - xyz^2 \vec{k}$  هو مجال غير محافظ.

(١٣) أثبت أن مجال القوة  $\vec{F}$  المعرفة كالتالي:  $\vec{F} = -kx \vec{i}$  هو مجال محافظ. ثم أوجد طاقة الجهد.

(١٤) جسيم كتلته 3 وحدات، ويتحرك في المستوى xy تحت تأثير مجال قوة له الجهد هو:  $V = 12x(3y - 4x)$ ، أوجد العجلة التي يتحرك بها هذا الجسيم.

# الفصل الثاني

## معادلات لاجرانج

Lagrange's Equations

- \* معادلات لاجرانج للمجموعات تامة التقييد
- \* تطبيقات على استخدام معادلات لاجرانج
- \* معادلات لاجرانج للمجموعات غير تامة التقييد
- \* معادلات لاجرانج والقوى الدافعية

## الفصل الثاني

### معادلات لاگرانج

### Lagrange's Equations

#### أولاً: معادلات لاگرانج للمجموعات تامة التقييد

Lagrange's Equations for Holonomic systems

#### ١-٢ مقدمة

معادلات لاگرانج يمكن اشتقاقها بعدة طرق ومنها التي سوف نبدأ بالقانون الثاني لنيوتن والتي سنستخدمها في هذا الفصل ولكن قبل إيجاد معادلات لاگرانج سنعطي بعض العلاقات الرياضية التي نحتاجها وكذلك مراجعة الصور الخاصة بالقوى المعممة والشغل المبذول بالقوة المؤثرة وطاقة الحركة وكمية الحركة ... الخ.

$$\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad \text{العلاقة الأولى :}$$

حيث  $v=1,2,\dots,N$  (رقم الجسم)،  $\alpha=1,2,\dots,n$  (رقم الإحداثي).  
البرهان :

$$\therefore \vec{r}_v = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (1)$$

$$\therefore \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \quad (2)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى الإحداثي المعمم للسرعة  $\dot{q}_\alpha$  فكل الحدود تتلاشى فيما عدا الحد رقم  $\alpha$  ويكون

$$\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (3)$$

وهو المطلوب إثباته.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad \text{العلاقة الثانية :}$$

البرهان: بالتفاضل جزئياً بالنسبة إلى  $q_\alpha$  المعادلة  $\vec{r}_v$  نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}_v}{\partial q_\alpha} &= \frac{\partial^2 \bar{r}_v}{\partial q_\alpha \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_v}{\partial q_\alpha \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_v}{\partial q_\alpha \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_v}{\partial q_\alpha \partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \bar{r}_v}{\partial q_\alpha \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \bar{r}_v}{\partial q_\alpha \partial t} \end{aligned} \quad (4)$$

وحيث أن  $\bar{r}_v$  دالة في  $(q_i, t)$  فإن  $\frac{\partial \bar{r}_v}{\partial q_\alpha}$  ستكون دوال في  $q_1, q_2, \dots, q_n, t$  أي أن:

$$\frac{\partial \bar{r}_v}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \bar{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t)}{\partial q_\alpha}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_v}{\partial q_1 \partial q_\alpha} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_v}{\partial q_2 \partial q_\alpha} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \bar{r}_v}{\partial q_n \partial q_\alpha} \dot{q}_n \quad (5)$$

الصيغتين السابقتين نحصل على :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial \bar{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (6)$$

أي أن :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( \frac{d}{dt} \right)$$

أي يمكن تبديل موضعي التفاضل الكلي والجزئي.

## ٢-٢ الشغل المبذول بالقوى المؤثرة والقوى المعممة:

بفرض أن القوة المؤثرة على الجسم رقم  $v$  هي  $\bar{F}_v$  وأن مجموعة الجسيمات ازاحت ازاحات تفاضلية (صغيرة) تجعل الزمن ثابت أي أثناء هذه الإزاحات ونتيجة لهذه الإزاحات فإن الجسم رقم  $v$  والذي متجه موضعه  $\bar{r}_v$  سيزاح الإزاحة  $d\bar{r}_v$  والتي تتعين من

$$d\bar{r}_v = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \bar{r}_v}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \quad (7)$$

ويصبح الشغل المبذول بواسطة القوة في هذه الإزاحات هو

$$dW = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot d\vec{r}_v = \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_{\alpha}} \right\} dq_{\alpha}$$

$$\therefore dW = \sum_{\alpha=1}^n Q_{\alpha} dq_{\alpha} \quad (8)$$

حيث  $Q_{\alpha} = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_{\alpha}}$  القوى المعممة المرافقة للإحداثي المعمم  $q_{\alpha}$  وتعرف بأنها تركيبة من القوى المؤثرة وتبذل شغلا في ازاحات المواضع  $dq_{\alpha}$  يساوى الشغل المبذول بالقوة الحقيقية في ازاحات مواضع الجسيمات  $d\vec{r}_{\alpha}$ .  
بما أن الشغل المبذول دالة في الإحداثيات المعممة أي  $W = W(q_1, q_2, \dots, q_n)$  فيكون:

$$dW = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha}$$

$$\sum_{\alpha=1}^n Q_{\alpha} dq_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha}$$

$$\sum_{\alpha=1}^n (Q_{\alpha} - \frac{\partial W}{\partial q_{\alpha}}) dq_{\alpha} = 0$$

وحيث أن  $dq_{\alpha}$  مستقلة عن بعضها فيكون:

$$Q_{\alpha} = \frac{\partial W}{\partial q_{\alpha}} \quad (9)$$

### ٣-٢ كمية الحركة المعممة:

هي تغير طاقة الحركة بالنسبة للسرعات المعممة

$$P_{\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \quad (10)$$

## ٤-٢ معادلة لاگرانج:

إذا فرضنا مجموعة ديناميكية هولونومية مكونة من جسيم كتلته  $m_v$  وله الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  وتؤثر عليه قوة  $\vec{F}_v$  فإذا كان  $\vec{r}_v$  هو متجه موضع الجسيم عند اللحظة  $t$  فإنه من قانون نيوتن الثاني تكون معادلة الحركة

$$m_v \vec{r}_v = \vec{F}_v$$

بضرب طرفي المعادلة قياسياً في  $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$  نحصل على :

$$m_v \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} = \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (11)$$

$$Q_\alpha = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \text{ ولاحظ أن}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) &= \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} + \vec{r}_v \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) \\ &= \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} + \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \\ \therefore \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} &= \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) - \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \quad (12)$$

بالتعويض من (12) في (11) بعد الضرب في  $m_v$  واستخدام المعادلة (10) يكون

$$\vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( m_v \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) - m_v \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha}$$

وبالنسبة لمجموعة  $N$  من الجسيمات والتي كتلة الجسم رقم  $v$  فيها  $m_v$

يمكن وضع الصورة السابق كالآتي:

$$\sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{v=1}^N m_v \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \right) - \sum_{v=1}^N m_v \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (13)$$

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt} \left( m_v \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - m_v \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (14)$$

وحيث أن  $\vec{r}_v$  هو متجه سرعة الجسيم ومن ثم يمكن وضع الصورة السابقة  
(المعادلة (14) بدلالة طاقة الحركة  $T$  كالآتي

حيث أن:

$$T = \frac{1}{2} m_v (\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = m_v \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial \dot{q}_\alpha} = m_v \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = m_v \vec{r}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (17)$$

بالتعويض من المعادلة (16)، (17) في المعادلة (14) نحصل على :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (18)$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة لا جرانج للحركة للأنظمة الهولونومية وهي عبارة  
عن مجموعة معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية وعددها يساوي عدد الإحداثيات  
المعممة. ويجب التذكر دائماً أن لكل إحداثي معمم  $q_\alpha$  ترافقه معادلة لا جرانج بينما  
لكل جسيم ترافقه معادلة نيوتن للحركة.

وبلاحظ أيضاً أن  $\alpha$  في المعادلة السابقة يمكن أن تكون 1, 2, 3 أو 1, 2  
حسب عدد الإحداثيات المعممة للجسيم الواحد.

إذا كان لدينا  $N$  من الجسيمات فإن طاقة الحركة ستكون

$$T = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \vec{r}_v^2 = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \quad (19)$$

بتفاضل (19) بالنسبة إلى  $\dot{q}_\alpha$  مرة وأخرى بالنسبة إلى  $q_\alpha$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_{v=1}^N m_v \ddot{r}_v \cdot \frac{\partial \ddot{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{v=1}^N m_v \dot{r}_v \cdot \frac{\partial \dot{r}_v}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (21)$$

وأن

$$Q_\alpha = \sum_{v=1}^N \ddot{r}_v \cdot \frac{\partial \ddot{r}_v}{\partial q_\alpha} \quad (22)$$

في حالة ما إذا كانت المجموعة الديناميكية محافظة والتي فيها يمكن اشتقاق القوى المؤثرة على المجموعة من دالة جهد قياسية  $V$  ويحث أن  $V$  دالة في الإحداثيات المعممة وقد يدخل الزمن حسب ما إذا كان القيد مستقر أو غير مستقر زمنياً مع ملاحظة أنها لا تحتوي على السرعات المعممة، ومن ثم

$$V = V(q_\alpha, t) \quad \text{or} \quad V = V(q_\alpha) \quad (23)$$

نعلم أن :

$$Q_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad \text{وأن}$$

بالتعويض من المعادلة (24) في (18) نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} &= - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right] &= \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (T - V) = 0 \\ \therefore \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (T - V) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ومن المعادلة (25) أدخل لاگرانج الدالة الجديدة  $L$  التي هي دالة في  $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$  والزمن  $t$ .

$$L = T - V \quad (26)$$

حيث  $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$  بالتعويض من (26) في (25) نحصل على :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (27)$$

وهذه معادلة لاجرانج والتي يمكن أن توضع في الصورة

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (28)$$

حيث  $P_\alpha$  هي كمية الحركة المعممة  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$  ، ودالة الجهد  $V$  دالة في  $q_\alpha$  فقط.

### ❖ ملاحظات هامة:

(١) إذا كان قسم من القوى المعممة غير محافظ وليكن  $Q'_k$  والقسم الآخر يمكن اشتقاقه من دالة جهد مثل  $V$  فيمكننا كتابة القوى المعممة على الصورة:

$$Q_k = Q'_k - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (29)$$

وعلى ذلك باستخدام تعريف دالة لاجرانج تصبح المعادلات التفاضلية للحركة على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q'_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (30)$$

والمعادلة (29) مناسبة للاستخدام إذا كانت توجد قوى احتكاكية.

(٢) حركة المجموعة الديناميكية في الفراغ الثلاثي العادي الذي يتحرك فيه  $(x, y, z)$  تكون معادلة الحركة لكل جسيم وليكن  $v$  هي

$$m_v \frac{d \dot{x}_v}{dt} = F_{xv}, \quad m_v \frac{d \dot{y}_v}{dt} = F_{yv}, \quad m_v \frac{d \dot{z}_v}{dt} = F_{zv}$$

وعدد المعادلات 3N

في حالة استخدام دالة لاجرانج  $L$  ومعادلات لاجرانج  $\dot{P}_x = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$  حيث

$n$  هو بعد الفراغ التخلي الذي تتحرك فيه النقطة الممكنة  $(\alpha=1, 2, \dots, n)$  ،

للمجموعة الديناميكية والتي احداثياتها في هذا الفراغ هي الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  وهي ترسم مساراً في الفراغ النوني الأبعاد أثناء حركة المجموعة الديناميكية في الفراغ الثلاثي العادي ومعادلات لاجرانج تمثل معادلات حركة بدلالة المفاهيم المعممة والتي تحل محل قانون نيوتن.

(٢) من معادلات لاجرانج (لدالة لاجرانج التي لا تعتمد على الزمن صراحة) يمكن استنتاج قاعدة ثبوت الطاقة للمجموعة المحافظة

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) \quad (1)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad \text{ومن معادلة لاجرانج}$$

بالضرب في  $\dot{q}_\alpha$  والتجميع

$$\sum_{\alpha=1}^n \left[ \dot{q}_\alpha \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right] = 0 \quad (3)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$\sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \left( \ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right) \right] = 0 \quad (4)$$

من المعادلة (2)، (4) نحصل على

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{dL}{dt} = 0 \quad (5)$$

بالتعويض عن  $L = T - V$  مع ملاحظة أن  $V$  لا تعتمد على  $\dot{q}_\alpha$

المعادلة (5) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{d}{dt} (T - V) = 0 \quad (6)$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{d}{dt} (T - V) = 0$$

وبما أن

$$2T = \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_{\alpha} P_{\alpha} \quad (7)$$

باستخدام المعادلة (7) في (6)

$$\frac{d}{dt} (2T) - \frac{d}{dt} (T - V) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (T + V) = 0$$

ومنها نحصل على:

$$T + V = \text{constant}$$

المعادلة (7) تأتي من نظرية أويلر للدوال المتجانسة والتي تنص على أن الدالة

$\Phi(x, y, z)$  دالة متجانسة من الرتبة  $n$  إذا تحقق الشرط

$$\Phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n \Phi(x, y, z)$$

وللدوال المتجانسة يمكن تطبيق نظرية أويلر التي تنص على أن

$$x \Phi_x + y \Phi_y + z \Phi_z = n \Phi$$

ونظرية أويلر صحيحة أيضا إذا كانت الدالة  $\Phi$  دالة في أكثر من ثلاثة متغيرات وحيث أن طاقة الحركة  $T$  هي دالة متجانسة من الدرجة الثانية في السرعات المعممة  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  لذلك يمكن تطبيق نظرية أويلر ومن ثم يمكن كتابة

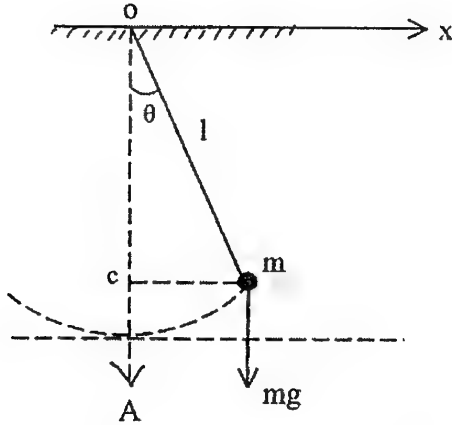
$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

**مثال ١:**

كون دالة لاجرانج للبندول البسيط ثم أوجد معادلة الحركة.

## الحل

شكل (٢-١)



نفرض أن الزاوية التي يصنعها الخيط oB مع الرأسى oA هي  $\theta$  ونفرض أن الجسم المعلق في الخيط كتلته  $m$  وطول الخيط  $l$  وهو مهمل الوزن.

واضح أن  $\theta$  هي الإحداثي المعمم في هذه الحالة أي أن:  $q = \theta$  لإيجاد طاقة الموضع (أو طاقة الجهد أو دالة الجهد)  $V$  نتبع الخطوات التالية:

❖ سوف نعتبر خط قياس الطاقة هو المحور الأفقي ox.

❖ القوى المؤثرة هي الوزن رأسياً إلى أسفل  $mg$  وهي التي سوف تبذل شغلاً بينما الشد في الخيط سوف لا يبذل شغلاً لأنه ليس هناك حركة في اتجاه الخيط.

$$V = -(\text{الشغل المبذول}) \Rightarrow V = -mg(\text{البعد } oc)$$

$$\therefore V = -mg l \cos \theta \quad (1)$$

إيجاد طاقة الحركة للبندول:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{where } v = l \dot{\theta} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (2)$$

دالة لاگرانج تصبح في هذه الحالة على الصورة:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m g l \cos \theta \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{معادلة لاگرانج تصبح على الصورة التالية:}$$

وباعتبار أن:  $q = \theta, \dot{q} = \dot{\theta}$  فإن معادلة لاگرانج تصبح على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

نوجد الآن التفاضلات الجزئية كالتالي:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg \ell \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2 \dot{\theta}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(m\ell^2 \dot{\theta}) = -mg \ell \sin \theta \Rightarrow m\ell^2 \ddot{\theta} = -mg \ell \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$$

ومنها نجد أن:

بوضع:  $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$  نحصل على معادلة البندول البسيط كحركة توافقية بسيطة على الصورة التالية:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$$

وباعتبار  $\sin \theta \cong \theta$  وذلك باعتبار  $\theta$  صغير نحصل على:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة حلها يعطى من:

$$\theta = A_1 \sin(\omega t \pm \varepsilon) \quad \text{or} \quad \theta = A_2 \cos(\omega t \pm \varepsilon)$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi / \sqrt{g/\ell} = 2\pi \sqrt{\ell/g} \quad \text{والزمن الدوري يعطى من:}$$

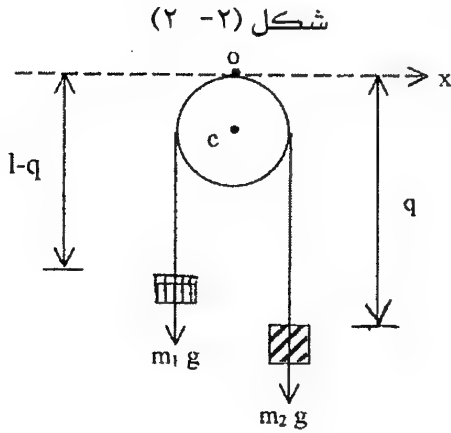
$$v = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/\ell} \quad \text{والتردد (هو مقلوب الزمن الدوري) يعطى من:}$$

س: أوجد دالة الجهد إذا أخذ خط قياس الطاقة هو الخط الأفقي المار بالنقطة A (أسفل نقطة).

### مثال ٢:

بكرة خفيفة ملساء مثبتة يمر عليها خيط خفيف طوله  $\ell$ ، معلق في أحد طرفي الخيط كتلة  $m_1$  والطرف الآخر كتلته  $m_2$ . (علما بأن  $m_1 > m_2$ ) أوجد: (أ) دالة لاجرانج في هذه الحالة. (ب) العجلة التي تتحرك بها الكتلة  $m_1$ .

## الحل



نفرض أن الخط الأفقي المار بأعلى نقطة في البكرة المثبتة هو خط قياس الجهد، ونفرض أن انخفاض الكتلة  $m_2$  عن خط قياس الجهد هو  $q$  وانخفاض الكتلة  $m_1$  يصبح:  $(\ell - q)$

وذلك لأن طول الخيط  $\ell$  ثابت.

سرعة الكتلة  $m_2$  تصبح:  $v_2 = \dot{q}$

سرعة الكتلة  $m_1$  تصبح:  $v_1 = -\dot{q}$  وطاقة الحركة هي:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (-\dot{q})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q})^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} \dot{q}^2 (m_1 + m_2) \quad (1)$$

طاقة الجهد تصبح:

$$V = -m_2 g q - m_1 g (\ell - q) \quad (2)$$

دالة لا جرانج تصبح:

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2 - g(m_1 - m_2)q + m_1 g \ell \quad (3)$$

الآن نحسب:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -g(m_1 - m_2), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2) \dot{q}$$

معادلة لا جرانج تصبح:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{q} = -g(m_1 - m_2)$$

$$\ddot{q} = -g \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \Rightarrow \ddot{q} = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} g$$

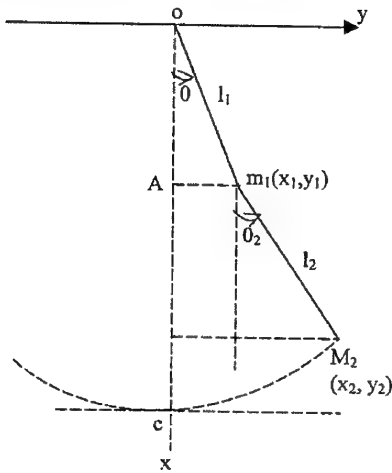
وهذه هي العجلة المطلوبة.

### مثال ٣:

- بندول مزدوج (مكون من كتلتين  $m_1, m_2$ ) مقيد الحركة في مستوى يهتز في مستوى رأسي. أ- أكتب دالة لاجرانج للمنظومة.  
 ب- أوجد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج.  
 ج- إذا كانت  $\ell = \ell_1 = \ell_2$ ,  $m = m_1 = m_2$  فاكتب معادلات الحركة في هذه الحالة.  
 د- إذا كانت الذبذبات للبندول صغيرة. فأوجد ما تؤول إليه معادلات الحركة السابقة.  
 هـ- إذا كانت  $\theta_1 = A_1 \cos \omega t$ ,  $\theta_2 = A_2 \cos \omega t$  فأوجد الترددات العادية للبندول المزدوج.

### الحل

شكل (٢-٣)



من الشكل يمكن الحصول على:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \ell_1 \cos \theta_1 \\ y_1 &= \ell_1 \sin \theta_1 \\ x_2 &= \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2 \\ y_2 &= \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} (1)$$

بتفاضل العلاقات السابقة بالنسبة للزمن

نحصل على:

$$\dot{x}_1 = -\ell_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (2)$$

$$\dot{y}_1 = \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1$$

وأیضا نجد أن:

$$\dot{x}_2 = -\ell_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \ell_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

$$\dot{y}_2 = \ell_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

وبالتالي تكون طاقة الحركة للبندول هي:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \text{ where } \vec{v}_1 = \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{y}_1 \vec{j},$$

$$\vec{v}_2 = \dot{x}_2 \vec{i} + \dot{y}_2 \vec{j}, \quad v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2, \quad v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (3)$$

وبالتعويض من (٢) في (٣) نحصل على:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left[ (-\ell_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 + (\ell_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \left[ (-\ell_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - \ell_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right.$$

$$\left. + (\ell_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 \right]$$

والتي يمكن اختصارها للصورة التالية:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

ونوجد الآن طاقة الجهد للبندول المزدوج ولذا نختار مستوى قياس للطاقة وليكن المستوى الأفقي المار بالنقطة c أي المستوى الذي يقع على بعد  $\ell_1 + \ell_2$  أسفل نقطة التعليق فتكون طاقة الجهد للبندول المركب على النحو التالي:

$$V = m_1 g (\ell_1 - \ell_1 \cos \theta_1) + m_2 g [\ell_1 + \ell_2 - (\ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2)] \quad (5)$$

$$L = T - V$$

وتكون دالة لاگرانج هي:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] - m_1 g [\ell_1 + \ell_2 - \ell_1 \cos \theta_1]$$

$$- m_2 g [\ell_1 + \ell_2 - (\ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2)]$$

وهذا هو المطلوب الأول.

ب) لإيجاد معادلات الحركة باستخدام معادلات لاگرانج نكتب المعادلتان التاليتان المصاحبتان لكل من الإحداثيين المعممين  $\theta_1, \theta_2$  كالتالي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (5)$$

من (٣) نجد أن:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_1 g \ell_1 \sin \theta_1 - m_2 g \ell_1 \sin \theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 [\ell_1^2 \dot{\theta}_1 + \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 [\ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g \ell_2 \sin \theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 \ell_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

وبذلك تصبح المعادلات على (٢) على الصورة:

$$\begin{aligned} & m_1 \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ & = -m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_1 g \ell_1 \sin \theta_1 - m_2 g \ell_1 \sin \theta_1 \\ & \quad m_2 \ell_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ & = m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g \ell_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

المعادلتان السابقتان تختصران على الترتيب إلى:

$$(m_1 + m_2) \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -(m_1 + m_2) g \ell_1 \sin \theta_1 \quad (6)$$

$$m_2 \ell_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -m_2 g \ell_2 \sin \theta_2 \quad (7)$$

ثالثا: إذا كانت  $\ell = \ell_1 = \ell_2$ ,  $m = m_1 = m_2$  فإن المعادلتين (٦)، (٧) تصبحان:

$$2\ell \ddot{\theta}_1 + \ell \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \ell \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -2g \sin \theta_1 \quad (8)$$

$$\ell \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \ell \ddot{\theta}_2 - \ell \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -g \sin \theta_2 \quad (9)$$

رابعا: في حالة الذبذبات الصغيرة فإن:  $\sin \theta \cong \theta$ ,  $\cos \theta \cong 1$  وإهمال الحدود التي تشتمل على المضروب  $\dot{\theta}^2 \theta$  فإن المعادلتين (٨)، (٩) تصبحان:

$$\ell \ddot{\theta}_1 + \ell \ddot{\theta}_2 = -g \theta_2 \quad (10)$$

$$2\ell \ddot{\theta}_1 + \ell \ddot{\theta}_2 = -g \theta_1 \quad (11)$$

ولإيجاد الترددات العادية، نضع:  $\theta_1 = A_1 \cos \omega t$ ,  $\theta_2 = A_2 \cos \omega t$  أو  $(A_1 e^{i\omega t}, A_2 e^{i\omega t})$  في المعادلتين (٩)، (١٠) وعندئذ تصبحان:

$$\begin{aligned} 2(g - \ell \omega^2) A_1 - \ell \omega^2 A_2 &= 0 \\ -\ell \omega^2 A_1 + (g - \ell \omega^2) A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ولكي لا تكون  $A_1, A_2$  مساوية للصفر فإن محدد المعاملات يجب أن يساوي الصفر أي أن:

$$\begin{vmatrix} 2(g - \ell \omega^2) & -\ell \omega^2 \\ -\ell \omega^2 & g - \ell \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

أو:  $\ell^2 \omega^4 - \frac{4}{g \omega^2} + 2g^2 = 0$  بالحل نجد أن:

$$\omega^2 = \frac{4\ell g \pm \sqrt{16\ell^2 g^2 - 8\ell^2 g^2}}{2\ell^2} = \frac{(2 \pm \sqrt{2})g}{\ell}$$

أو:

$$\omega_1^2 = \frac{(2 + \sqrt{2})g}{\ell}, \quad \omega_2^2 = \frac{(2 - \sqrt{2})g}{\ell} \quad (13)$$

الترددان العاديان يعطيان:

$$v_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})g}{\ell}}, \quad v_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{2})g}{\ell}} \quad (14)$$

(ب) بالتعويض عن  $\omega^2 = \omega_1^2 = (2 + \sqrt{2})g/\ell$  في معادلتى (١٢) يؤدي إلى:

$$A_2 = -\sqrt{2}A_1 \quad (15)$$

وهذا يناظر النسق العادي للتذبذب الذي تكون فيه الأثقال متحركة في اتجاهات مضادة.

بالتعويض عن  $\omega^2 = \omega_2^2 = (-\sqrt{2})g/\ell$  في معادلتى (١٢) نحصل على:

$$A = -\sqrt{2}A_1 \quad (16)$$

وهذا يناظر النسق العادي للتذبذب الذي تكون الأثقال فيه في نفس الاتجاهات.

## مثال ٤:

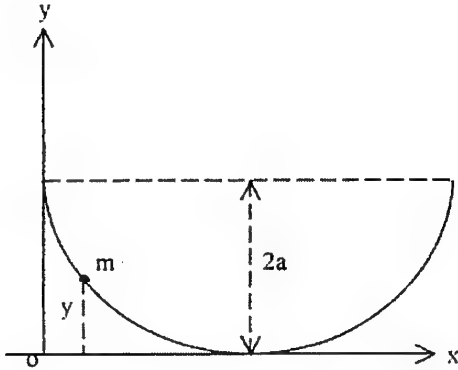
خرزة تنزلق بدون احتكاك على سلك أملس شكله هو منحني سيكلويد (دويرى) كما بشكل (٢-٤)، علاقات التحويل بين الإحداثيات الكرتيزية والإحداثي المعمم كالتالي:  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 + \cos \theta)$  حيث  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  أوجد: أ- دالة لاجرانج ب- معادلة الحركة ج- أثبت أن معادلة الحركة المستنتجة يمكن كتابتها على صورة معادلة الحركة التوافقية البسيطة التالية:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{g}{4a} u = 0$$

وذلك باستخدام التعويض  $u = \cos \frac{\theta}{2}$  ثم أوجد الزمن الدوري لذنبذة الخرزة في هذه الحالة.

الحل

شكل (٢-٤)



طاقة الحركة تعرف كالتالي:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (1)$$

بإجراء التفاضل بالنسبة للزمن  
للمعادلتين البارامتريتين لمنحنى  
السيكلويد نحصل على:

$$\dot{x} = a (1 - \cos \theta) \dot{\theta}, \quad (2)$$

$$\dot{y} = -a \sin \theta \dot{\theta}$$

بالتعويض من (٢) في (١) نحصل  
على:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m a^2 [(1 - \cos \theta)^2 \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\theta}^2] \\ &= \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 [1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \end{aligned}$$

التي تختصر إلى الصورة التالية:

$$T = m a^2 \dot{\theta}^2 [1 - \cos \theta] \quad (3)$$

وطاقة الحركة يمكن إيجادها فتكتب على الصورة التالية:

$$V = m g y = m g a (1 + \cos \theta) \quad (4)$$

$$L = T - V$$

إذا دالة لاگرانج تصبح:

$$L = m a^2 (1 - \cos \theta) \dot{\theta}^2 - m g a (1 + \cos \theta)$$

هذه هي دالة لاگرانج.

إيجاد معادلات الحركة:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2 m a^2 (1 - \cos \theta) \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = m a \sin \theta \dot{\theta}^2 + m g a \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= 2m a^2 \dot{\theta}^2 (\sin \theta) + 2m a^2 (1 - \cos \theta) \ddot{\theta} \\ &= 2m a^2 [(1 - \cos \theta) \ddot{\theta} + \sin \theta \dot{\theta}^2]\end{aligned}$$

بالتعويض من التفاضلات السابقة في (٥) نحصل على:

$$2m a^2 [(1 - \cos \theta) \ddot{\theta}] + 2m a^2 \sin \theta \dot{\theta}^2 - m a^2 \sin \theta \dot{\theta}^2 - mg m \sin \theta = 0$$

$$2ma (1 - \cos \theta) \ddot{\theta} + ma \sin \theta \dot{\theta}^2 - mg a \sin \theta = 0$$

ج- باستخدام التعويض المعطى:  $u = \cos \frac{\theta}{2}$  نجد أن:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \ddot{\theta} - \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} \dot{\theta}^2 \\ \frac{d^2 u}{dt^2} &= -\frac{1}{4} \left[ \sin \frac{\theta}{2} \ddot{\theta} - \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} \dot{\theta}^2 \right] \quad (7)\end{aligned}$$

ولكن من العلاقات المعروفة في حساب المثلثات نجد أن:

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

بالتعويض في المعادلة (٦) المستنتجة نجد أن:

$$4ma \sin^2 \frac{\theta}{2} \ddot{\theta} + 2ma \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \dot{\theta}^2 - 2mg \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0$$

بالقسمة على  $2ma \sin \frac{\theta}{2}$  نحصل على:

$$2 \sin \frac{\theta}{2} \ddot{\theta} + \cos \frac{\theta}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{a} \cos \frac{\theta}{2} = 0 \quad (8)$$

من المعادلتين (٧)، (٨) نحصل على:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{9}{4a} u = 0, \quad \text{where } \omega = \sqrt{g/(4a)}$$

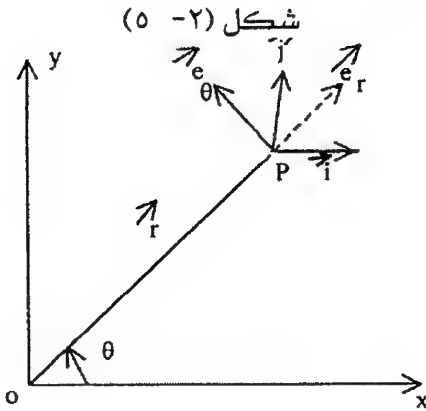
وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة فيها. ويكون الزمن الدوري  $\tau$ :

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/(4a)}} = 2\pi\sqrt{(4a)/g} \Rightarrow \tau = 4\pi\sqrt{a/g}$$

**مثال ٥:** (حركة جسيم في مجال مركزي تحت تأثير قوة مركزية).

يتحرك جسيم ذو كتلة  $m$  في مستوى تحت تأثير دالة جهد هي دالة فقط لبعده الجسيم من نقطة ثابتة في المستوى. أوجد معادلة لاجرانج لحركة هذا الجسيم.

### الحل



نفرض أن النقطة الثابتة هي نقطة أصل الإحداثيات القطبية  $(r, \theta)$  كما هو مبين بالرسم. العلاقة بين نظامي الإحداثيات الكرتيزية والقطبية المستوية هي:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

طاقة الحركة للجسيم  $T$  تعطى من:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2)$$

من (١) في (٢) بعد إجراء التفاضلات نحصل على:

$$T = \frac{1}{2} m \left[ (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta})^2 + (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta})^2 \right]$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (3)$$

وإذا عبرنا عن طاقة الجهد بـ  $V_r$  فيمكننا كتابة دالة لاجرانج بالشكل التالي:

$$L = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] - V_r \quad (4)$$

وتكون معادلات لاجرانج للحركة على الصورة:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (5), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

والمشتقات الجزئية المناسبة هي:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m \dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial r} &= m r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V_r}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - F_r \\ & & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m r^2 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (6)$$

بالتعويض من (٦) في (٥) نحصل على معادلات حركة الجسيم كالتالي:

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F_r, \quad \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (7)$$

وهذه هي المعادلات التي درست من قبل في حالة حركة جسيم في مجال مركزي  
❖ ملاحظة:

كان من الممكن كتابة طاقة الحركة مباشرة كالتالي:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

وذلك لأن:

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

### مثال ٦:

إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي:

$$L = (k + \frac{1}{2}) \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 - \frac{n^2}{2} (k+1) q_1^2 - \frac{n^2}{2} q_2^2$$

أ- اكتب معادلات لاجرانج للحركة ب- أثبت أن:  $q_1 - q_2 = A \cos(N+B)$

حيث  $A, B, N, k, n$  كميات ثابتة. وأن:  $N^2 k = (k+1) n^2$

ج- أوجد حل معادلات الحركة المستنتجة أي أوجد:  $q_1(t), q_2(t)$

### الحل

دالة لاگرانج المعطاه هي دالة في الإحداثيين المعممين  $q_1, q_2$  وهي:

$$L = (k + \frac{1}{2})\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \frac{n^2}{2}(k+1)q_1^2 - \frac{n^2}{2}q_2^2$$

ومنها يمكن إيجاد التفاضلات الجزئية التالية:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} &= -n^2(k+1)q_1, & \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -n^2q_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= 2(k + \frac{1}{2})\dot{q}_1 + \dot{q}_2, & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) &= 2(k + \frac{1}{2})\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) &= \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{aligned}$$

وعلى ذلك معادلات لاگرانج تصبح:

$$2(k + \frac{1}{2})\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + n^2(k+1)q_1 = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + n^2q_2 = 0 \quad (2)$$

بضرب (٢) في  $(k+1)$  نجد أن:

$$(k+1)\ddot{q}_1 + (k+1)\ddot{q}_2 + n^2(k+1)q_2 = 0 \quad (3)$$

بطرح (٣) من (١) نجد أن:

$$k(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + n^2(k+1)(q_1 - q_2) = 0 \quad (4)$$

بوضع:  $x = q_1 - q_2$  المعادلة (٤) تصبح على شكل معادلة تفاضلية (معادلة حركة توافقية بسيطة) على الصورة:

$$k\ddot{x} + n^2(k+1)x = 0$$

وحلها معروف هو:

$$x = A \cos\left(\sqrt{\frac{n^2(k+1)}{k}}t + B\right)$$

بوضع:  $N^2 = \frac{n^2(k+1)}{k}$  ، الحل السابق يأخذ الشكل التالي:

$$x = A \cos(Nt + B) \Rightarrow q_1 - q_2 = A \cos(Nt + B) \quad (5)$$

ج- لإيجاد حل معادلات الحركة (١) ، (٢) أي أوجد:  $q_1(t)$  ،  $q_2(t)$  نتبع الخطوات التالية، بجمع (١)، (٢) نجد أن:

$$[2(k + \frac{1}{2}) + 1]\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + [n^2(k+1)q_1] + n^2q_2 = 0$$

$$2[(k+2)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] + n^2[(k+1)q_1 + q_2] = 0$$

بوضع:

$$y = (k+1)q_1 + q_2 \Rightarrow \ddot{y} = (k+1)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$$

ومنها نجد أن:

$$2\ddot{y} + n^2y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{n^2}{2}y \quad \text{where} \quad \omega^2 = \frac{n^2}{2} \quad (6)$$

المعادلة (6) أصبحت على شكل معادلة تفاضلية أيضا (معادلة حركة توافقية بسيطة) حلها يمكن وضعه على الصورة:

$$y = C_1 \cos(\omega t + D)$$

أي أن:

$$(k+1)q_1 + q_2 = C_1 \cos(\frac{n}{\sqrt{2}}t + D) \quad (7)$$

بجمع الحلين (٥) ، (٧) نحصل على:

$$(k+2)q_1 = A \cos(Nt + B) + C_1 \cos(\frac{n}{\sqrt{2}}t + D)$$

$$q_1 = \frac{A}{k+2} \cos(Nt + B) + \frac{C}{k+2} \cos(\frac{n}{\sqrt{2}}t + D)$$

وهذه هي  $q_1(t)$  ويطرح المعادلتين (٥)، (٧) نحصل على:

$$(k+2)q_2 = -(k+1)A \cos(Nt+B) + C \cos\left(\frac{n}{\sqrt{2}}t + D\right)$$

ومنها نحصل على  $q_2(t)$  على الصورة التالية:

$$q_2 = \frac{-(k+1)}{k+2} A \cos(Nt+B) + C \cos\left(\frac{n}{\sqrt{2}}t + D\right)$$

مثال ٧:

قذف جسيم كتلته  $m$  يتحرك في مجال محافظ في المستوي  $xy$  وكانت له طاقتي

$$V = mgy, \quad T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{كالتالي:}$$

- أ- أوجد دالة لاجرانج وأوجد معادلتى لاجرانج للحركة في اتجاه محوري  $xy$ .  
 ب- أوجد كل من  $x, y$  إذا كانت الشروط الابتدائية هي كالتالي: الجسيم قذف في البداية بسرعة ابتدائية مقدارها  $v$  تميل على الأفقي بزاوية  $\alpha$  وكانت نقطة القذف هي نقطة الأصل.

### الحل

دالة لاجرانج هي كالتالي:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

معادلتى الحركة:

(i) في اتجاه محور  $x$  أو في اتجاه الإحداثي المعمم  $x$  وهي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (1)$$

(ii) في اتجاه محور  $y$  هي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad (2)$$

نوجد الآن التفاضلات الجزئية أو العادية كالتالي:

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

وبالتعويض في (١) نجد أن:

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

وبالتعويض في (٢) نجد أن:

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g \quad (4)$$

ب- الشروط المعطاة يمكن كتابتها رياضيا كالتالي:

$$\text{at } t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (5)$$

$$\text{at } t = 0, \quad \left. \begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} &= v_0 \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ومن المعادلة (٣) نجد أن:

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = c_1$$

حيث  $c_1$  ثابت تكامل يعين من الشروط السابقة.من الشرط (٦) نجد أن:  $\dot{x} = v_0 \cos \alpha = c_1$  at  $t = 0$ , ومنها يكون:

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$$

وبالتكامل مرة أخرى بالنسبة للزمن نجد أن:  $x = (v_0 \cos \alpha)t + c_2$ حيث  $c_2$  ثابت تكامل يعين من الشروط وهي:

$$\text{at } t = 0, \quad x = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\therefore x = (v_0 \cos \alpha)t$$

وبالمثل من المعادلة (٤) يكون:  $\ddot{y} = -g$  وبالتكامل بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\dot{y} = -gt + c_3$$

حيث  $c_3$  ثابت تكامل يعين باستخدام الشروط وهي:

$$\text{at } t=0, \dot{y} = v_0 \sin \alpha \Rightarrow c_3 = v_0 \sin \alpha$$

$$\therefore \dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt$$

وبالتكامل مرة أخرى نجد أن:  $y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + c_4$  حيث  $c_4$  ثابت تكامل ويوجد باستخدام الشروط وهي:

$$\text{at } t=0, y=0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

### مثال ٨:

إذا كان الفرق بين طاقتي الحركة والموضع لمنظومة ميكانيكية يعطي من العلاقة

$$\frac{\dot{x}^2}{2(A + By^2)} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - cy^2 \quad \text{التالية:}$$

حيث  $A, B, C$  ثوابت. أوجد معادلات الحركة لهذه المنظومة.

### الحل

دالة لاجرانج معطاة من المثال التالي:

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2(A + By^2)} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - cy^2 \quad (1)$$

معادلات لاجرانج تصبح:

(١) المعادلة التي في اتجاه الإحداثي المعمم  $x$  وهي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (2)$$

(٢) المعادلة التي في اتجاه الإحداثي المعمم  $y$  هي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad (3)$$

والآن نجري التفاضلات الجزئية والعادية كالتالي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{(A + By^2)}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{(A + By^2)\ddot{x} - \dot{x}(2By\dot{y})}{(A + By^2)^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-\dot{x}^2(4By)}{4(A+By^2)^2} - 2cy$$

بالتعويض من هذه التفاضلات في (٢)، (٣) نجد أن:

$$\frac{(A+By^2)\ddot{x} - \dot{x}(2By\ddot{y})}{(A+By^2)^2} = 0 \Rightarrow (A+By^2)\ddot{x} - \dot{x}(2By\ddot{y}) = 0 \quad (4)$$

$$\ddot{y} = \frac{-B\dot{x}^2 y}{(A+By^2)^2} - 2cy \quad (5)$$

### مثال ٩:

إذا كانت دالة لاجرانج لنظام ما معطاة بالمعادلة التالية:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (q_1 + q_2)^2$$

أوجد معادلات لاجرانج للحركة ثم أوجد  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$

### الحل

لإيجاد معادلات لاجرانج (وهما معادلتان حيث لدينا حدثان معلمان هما  $q_1, q_2$ ) نجد المشتقات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}(2\dot{q}_1) = \dot{q}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -2(q_1 - q_2) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = +2(q_1 - q_2)$$

إذا معادلة لاجرانج الأولى تصبح:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \ddot{q}_1 + 2(q_1 - q_2) = 0 \quad (1)$$

معادلة لاجرانج الثانية تصبح:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow \ddot{q}_2 - 2(q_1 - q_2) = 0 \quad (2)$$

والمعادلتان (١)، (٢) هما معادلتا الحركة لا جرانج المطلوبتين:  
بجمع المعادلتين (١)، (٢) نجد أن:

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 0 \quad (3)$$

وبالتكامل بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = A$$

وبالتكامل مرة أخرى بالنسبة للزمن نحصل على:

$$q_1 + q_2 = At + B \quad (4)$$

ب طرح المعادلتين (١)، (٢) نجد أن:

$$\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 + 4(q_1 - q_2) = 0 \quad (5)$$

نفرض أن:

$$x = q_1 - q_2 \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 \quad (6)$$

بالتعويض من (٦) في (٥) نجد أن:

$$\ddot{x} + 4x = 0 \quad (7)$$

$$\ddot{x} = -4x$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى وسبق دراستها في موضوع الحركة التوافقية البسيطة وحلها معروف أو يمكن إيجاده بسهولة على الصورة:

$$x = c \cos(2t + \alpha) \quad (8)$$

$$\therefore q_1 - q_2 = c \cos(2t + \alpha) \quad (9)$$

من (٤)، (٩) بالجمع نجد أن:

$$2q_1 = c \cos(2t + \alpha) + At + B$$

$$q_1 = \frac{1}{2} [c \cos(2t + \alpha) + At + B] \quad (10)$$

ب طرح (٤) من (٩) نجد أن:

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 - q_1 - q_2 &= c \cos(2t + \alpha) - At - B \\ -2q_2 &= c \cos(2t + \alpha) - At - B \\ q_2 &= -\frac{1}{2} \{c \cos(2t + \alpha) - At - B\} \end{aligned} \quad (11)$$

وهو المطلوب.

**ملاحظة:** المعادلة التفاضلية  $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$  سبق التعامل معها من قبل في أكثر من موضع ولها المعادلة المساعدة:  $m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2i$  وعلى ذلك حلها يصبح على الصورة:

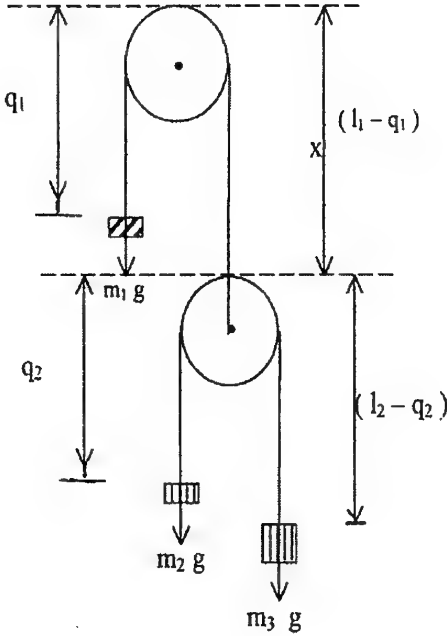
$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it} \\ &= c_1 [\cos 2t + i \sin 2t] \\ &= c_2 [\cos 2t - i \sin 2t] \\ &= c \cos(2t + \alpha) \end{aligned}$$

#### مثال ١٠: (آلة أتود المزدوجة):

❖ كتلة  $m_1$  معلقة عند أحد طرفي خيط خفيف طوله  $\ell_1$  يمر على بكرة خفيفة مثبتة ملساء وعند الطرف الآخر للخيط توجد بكرة خفيفة أيضا ومثبتة وملتساء يمر عليها خيط خفيف طوله  $\ell_2$  ويحمل كتلتين  $m_2, m_3$ . أوجد: أ- دالة لاجرانج ومعادلات لاجرانج.

الحل

شكل (٢ - ٦)



توجد درجتان حرة للمنظومة  $q_1, q_2$  هما الإحداثيان المعممان. أيضا البكرتان خفيفتا الوزن وكذلك الخيوط  $\ell_1, \ell_2$  نوجد أولا: طاقة الحركة للمجموعة كالتالي:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (-\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$$

أي أن:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)$$

إذا طاقة الحركة تصبح في الصورة التالية:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \dot{q}_1^2 + (m_3 - m_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{q}_2^2$$

نوجد الآن طاقة الجهد:

$$V = -m_1 g q_1 - m_2 g [q_2 + \ell_1 - q_1] - m_3 g [(\ell_1 - q_1) + (\ell_2 - q_2)]$$

والتي يمكن اختصارها على النحو التالي:

$$V = (m_2 + m_3 - m_1) g q_1 + (m_3 - m_2) g q_2 - (m_2 \ell_1 + m_3 \ell_1 + m_3 \ell_2) g$$

على ذلك تصبح دالة لاجرانج على الصورة التالية:

$$L = T - V \quad (2)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1^2 + (m_3 - m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{q}_2^2 - (m_2 + m_3 - m_1)gq_1 - (m_3 - m_2)gq_2 + [m_2\ell_1 + m_3(\ell_1 + \ell_2)]g \quad (3)$$

ولإيجاد معادلات الحركة من دالة لاجرانج  $L$  تصبح المعادلة الأولى المصاحبة للإحداثي  $q_1$  كالتالي:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_2 = -(m_2 + m_3 - m_1)g \quad (4)$$

وذلك لأن:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1 + (m_3 - m_2)\dot{q}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_2 + m_3 - m_1)g$$

بالمثل معادلة لاجرانج الثانية المصاحبة للإحداثي  $q_2$  تصبح كالتالي:

$$\therefore (m_3 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 = -(m_3 - m_2)g \quad (5)$$

وذلك لأن:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = (m_3 - m_2)\dot{q}_1 + \frac{2}{2}(m_2 + m_3)\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = (m_3 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -(m_3 - m_2)g$$

المعادلتان (٤)، (٥) هما معادلتا الحركة في هذه الحالة.

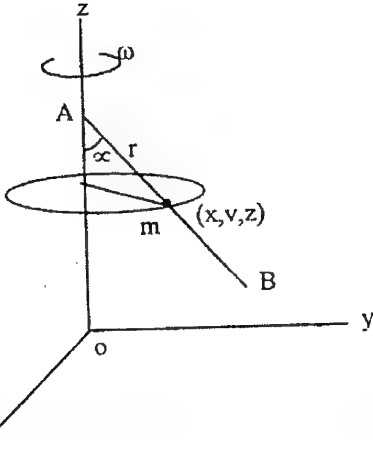
مثال ١١:

AB يمثل سلكا مستقيما أملس مثبتا عند النقطة A على محور رأسي OA بحيث يدور AB حول OA بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$ . وضعت خرزة كتلتها m بحيث تكون مقيدة لتتحرك على السلك.

أ- أوجد دالة لاجرانج. ب- أكتب معادلات لاجرانج. ج- حدد الحركة عند أي لحظة. د- بفرض أن الخرزة بدأت من السكون عند A ما هو الزمن الذي تستغرقه حتى تصل إلى طرف السلك B (بفرض أن طول السلك هو  $l$ ).

الحل

(٢ - ٧)



أ- نفرض أن  $r$  هي المسافة التي تبعدا الخرزة عن النقطة A على السلك عند اللحظة  $t$ . الإحداثيات المتعامدة للخرزة تعطي من:

$$x = r \sin \alpha \cos \omega t$$

$$y = r \sin \alpha \sin \omega t$$

$$z = h - r \cos \alpha$$

حيث افترضنا أن السلك عند اللحظة  $t$

يكون في المستوي  $xz$  وان المسافة من O إلى A هي  $h$  وعلى ذلك تكون طاقة حركة الخرزة هي:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m \{ (\dot{r} \sin \alpha \cos \omega t - \omega r \sin \alpha \sin \omega t)^2 + (\dot{r} \sin \alpha \sin \omega t + \omega r \sin \alpha \cos \omega t)^2 + (-\dot{r} \cos \alpha)^2 \}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha)$$

وطاقة الجهد باعتبار المستوي xy مستوي قياسيا هي:

$$V = mgz = mg(h - r \cos \alpha)$$

وبذلك تكون دالة لاجرانج هي:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha) - mg(h - r \cos \alpha)$$

ب- إيجاد معادلات لاجرانج:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\omega^2 r \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \text{ومعادلة لاجرانج هي:}$$

$$m\ddot{r} - (m\omega^2 r \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha) = 0 \quad \text{أو:}$$

أي أن:

$$\ddot{r} - (\omega^2 \sin^2 \alpha)r = g \cos \alpha \quad (1)$$

ج- الحل العام للمعادلة (١) بوضع الطرف الأيمن يساوي صفرا هو:

$$r_c = c_1 e^{(\omega \sin \alpha)t} + c_2 e^{-(\omega \sin \alpha)t}$$

وحيث أن الطرف الأيمن للمعادلة (١) يكون ثابتا فإن الحل الخاص هو:

$$r_p = \frac{-g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة (١) هو:

$$r = r_c + r_p = c_1 e^{(\omega \sin \alpha)t} + c_2 e^{-(\omega \sin \alpha)t} - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (2)$$

هذه النتيجة يمكن أيضا كتابتها بدلالة الدوال الزائدية على الصورة:

$$r = c_3 \cosh(\omega \sin \alpha)t + c_4 \sinh(\omega \sin \alpha)t - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (3)$$

د- استخدام الشروط المعطاة لتعيين الثوابت ٠٠ حيث أن الخرزة تبدأ من السكون عند  $t = 0$  يكون لدينا  $r = 0$ ،  $\dot{r} = 0$  عند  $t = 0$ . وعندئذ من المعادلة (٢) يكون:

$$c_1 - c_2 = 0, \quad c_1 + c_2 = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

$$c_1 = c_2 = \frac{g \cos \alpha}{2\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad \text{أي أن:}$$

والمعادلة (٢) تصبح:

$$r = \frac{g \cos \alpha}{2\omega^2 \sin^2 \alpha} \left\{ e^{(\omega \sin \alpha)t} + e^{-(\omega \sin \alpha)t} \right\} - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (1)$$

أو:

$$r = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \{ \cosh(\omega \sin \alpha)t - 1 \} \quad (2)$$

ويمكن الحصول عليها كذلك من المعادلة (٣) عندما تكون  $r = \ell$  فإن المعادلة (٢) تعطي:

$$\cosh(\omega \sin \alpha)t = \ell + (\ell \omega^2 \sin^2 \alpha) / g \cos \alpha$$

وبذلك يكون الزمن المطلوب هو:

$$t = \frac{\ell}{\omega \sin \alpha} \cosh^{-1} \left( \ell + \frac{\ell \omega^2 \sin^2 \alpha}{g \cos^2 \alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{\omega \sin \alpha} \ln \left\{ \left( \ell + \frac{\ell \omega^2 \sin^2 \alpha}{g \cos^2 \alpha} \right) + \sqrt{\left( \ell + \frac{\ell \omega^2 \sin^2 \alpha}{g \cos^2 \alpha} \right)^2 - 1} \right\}$$

### مثال ١٢:

جسيم كتلته  $m$  يتحرك في مجال قوة محافظ. أوجد في الإحداثيات الأسطوانية  $(\rho, \phi, z)$ : أ- دالة لاجرانج. ب- معادلات الحركة ج- وإذا كان الجسيم يتحرك في المستوى  $xy$  وكانت دالة الجهد تعتمد فقط على البعد عن نقطة الأصل، في هذه الحالة  $V$  تعتمد فقط على  $\rho$  ( $z=0$ ) أوجد معادلات الحركة في هذه الحالة.

### الحل

$$\frac{1}{2} m[\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2] = T = \text{طاقة الحركة الكلية}$$

طاقة الجهد  $V(\rho, \phi, z) = V$  عندئذ تكون دالة لاجرانج هي:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m[\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2] - V(\rho, \phi, z)$$

(ب) معادلات لاجرانج هي:

المعادلة الأولى وليكن لها الإحداثي المعمم الأول هو:  $\rho$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) = m\ddot{\rho}$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \quad (1)$$

المعادلة الثانية وليكن لها الإحداثي المعمم الأول هو:  $\phi$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(\rho^2 \dot{\phi}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\phi})$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\phi}) = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

❖ المعادلة الثالثة وليكن لها الإحداثي المعمم الأول هو:  $Z$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ج- وإذا كان الجسم يتحرك في المستوي  $xy$  وإذا كانت دالة الجهد تعتمد فقط على البعد عن نقطة الأصل، فإنه في هذه الحالة  $V$  تعتمد فقط على  $\rho$  عند  $(z=0)$  عندئذ تصبح معادلات لاگرانج السابقة على الصورة:

$$m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\phi}) = 0$$

وهاتان هما معادلتا الحركة في مجال قوة مركزية.

### مثال ١٣:

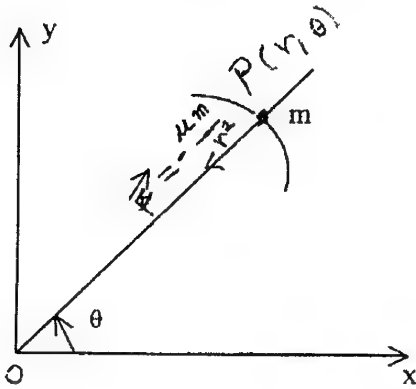
جسيم كتلته  $m$  يتحرك تحت تأثير قوة جذب مركزي  $\mu m/r^2$  أوجد باستخدام معادلات لاگرانج معادلات الحركة للجسيم.

### الحل

في الإحداثيات القطبية يكون لدينا إحداثيان معممان هما:  $q_1 = r, q_2 = \theta$   
 بفرض أن الجسيم في وضع عام عند النقطة  $(r, \theta)$  وسرعته عند هذه اللحظة هي  $(\dot{r}, r\dot{\theta})$  وتكون طاقة الحركة للجسيم هي:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

شكل (٢-٨)



وطاقة وضعه تصبح:  $V = V(r)$   
 إذن دالة لاگرانج يمكن أن  
 تكتب على الصورة التالية:

$$\therefore L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

ومنها نجد أن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m \dot{r} & , & \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m r^2 \dot{\theta} & , & \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

معادلات لاگرانج ستكون

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= Q_i, \quad i=1,2 \\ m \ddot{r} &= m r \dot{\theta}^2 + f(r), \quad \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0 \\ m \ddot{r} &= m r \dot{\theta}^2 + \left( -\frac{\mu m}{r^2} \right), \quad m r^2 \dot{\theta} = \text{const} = h \end{aligned}$$

حيث أن  $Q_r, Q_\theta$  يمكن إيجادهما كالآتي:

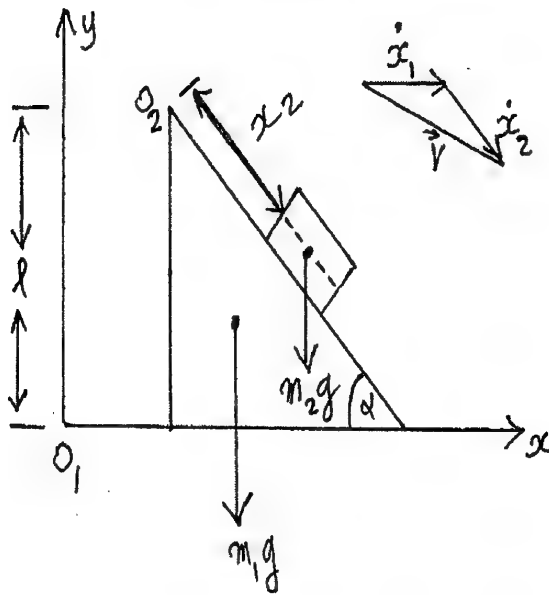
$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\mu m / r^2 \vec{e}_r, \quad \vec{r} = r \vec{e}_r \\ \delta W &= \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = \frac{-\mu m}{r^2} \delta r, \quad Q_r = \frac{-\mu m}{r^2}, \quad Q_\theta = 0 \end{aligned}$$

مثال ١٤:

جسيم كتلته  $m$  قابلة للانزلاق على مستوى مائل أملس كتلته  $m_2$  ينزلق هذا المستوى المائل على سطح أفقي أملس كما بشكل (٢-٩). أوجد معادلات حركة الجسيم والمستوى المائل.

الحل

شكل (٢-٩)



المجموعة لها درجتان حرة  $x_1, x_2$  نفرض أن  $(x, y)$  الموضع العام للكتلة  $m_2$  وأن  $x_1, x_2$  هما أبعاد  $m_1, m_2$  عن  $O_1, O_2$  ومن ثم تكون سرعتاهما  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  وبالتالي:

$$x = x_1 + x_2 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y = l - x_2 \sin \alpha$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\dot{y} = -\dot{x}_2 \sin \alpha$$

$$v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \cos^2 \alpha + 2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos \alpha + \dot{x}_2^2 \sin^2 \alpha \quad (3)$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos \alpha) \quad (4)$$

دالة الجهد للكتلة  $m_2$  فقط وتساوي:  $V = -m_2 g x_2 \sin \alpha + c$

بوضع  $c = 0$  فإن دالة لاجرانج تصبح:  $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos \alpha) + m_2 g x_2 \sin \alpha + c \quad (5)$$

معادلات لاگرانج (الإحداثيات  $x_1, x_2$ ) هي :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \cos \alpha) = 0$$

(7)

$$m_2 (\ddot{x}_1 \cos \alpha + \ddot{x}_2) - m g \sin \alpha = 0$$

بحل المعادلتين نحصل على

$$\ddot{x}_2 = (g \sin \alpha) / [1 - (\frac{m_2 \cos^2 \alpha}{m_1 + m_2})],$$

$$\ddot{x}_1 = -(-g \sin \alpha \cos \alpha) / (\frac{m_1 + m_2}{m_2} - \sin^2 \alpha)$$

$\ddot{x}_1$  إشارتها سالبة،  $\ddot{x}_2$  موجبة وبإعطاء الشروط الابتدائية فإنه يمكن تكامل

هذه المعادلات للحصول على السرعات والإزاحات للمجموعة.

معادلة السرعة للكتلة  $m_2$  يمكن الحصول عليها من  $\vec{v} = \vec{\dot{x}}_1 + \vec{\dot{x}}_2$

من المثلث الاتجاهي يكون:  $v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos \alpha$

طاقة الحركة للمجموعة تصبح:  $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m v^2$

مثال ١٥:

خرزة كتلتها  $m$  تنزلق على سلك دائري أملس نصف قطره  $a$  فإذا كان السلك يدور

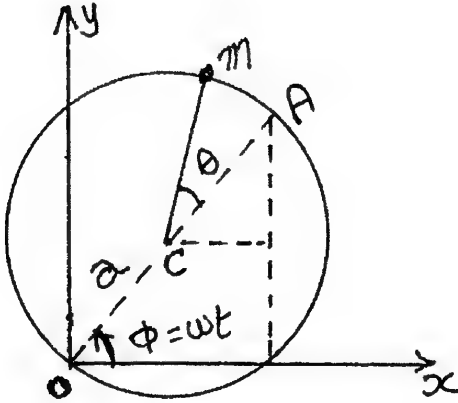
عكس عقارب الساعة في مستوى أفقي بسرعة زاوية  $\omega$  حول محور عمودي على

المستوى ماراً بنقطة  $O$  على محيطه.

(أ) أدرس حركة الخرزة (ب) أوجد رد فعل السلك على الخرزة.

## الحل

شكل (٢-١٠)



C مركز السلك والقطر oA يدور  
بزاوية  $\phi$  حيث أن المسافة الزاوية  
هي  $\omega t = \phi$  فإذا كانت الخرزة  
تصنع زاوية  $\theta$  مع القطر oA  
(أ) لدراسة حركة الخرزة نلاحظ  
أنه يوجد لها درجة حرية  
واحدة  $q_1 = \theta$  فيمكن كتابة  
الإحداثيات الكرتيزية للخرزة  
بدلالة الإحداثي المعمم  $\theta$  :

$$x = a \cos \omega t + a \cos (\omega t + \theta) \quad (1)$$

$$y = a \sin \omega t + a \sin (\omega t + \theta) \quad (2)$$

$$\dot{x} = -a \sin \omega t - a(\sin (\omega t + \theta))(\omega + \dot{\theta}) \quad (3)$$

$$\dot{y} = a \omega \cos \omega t + a(\omega + \dot{\theta}) \cos (\omega t + \theta) \quad (4)$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{طاقة الحركة}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m a^2 [\omega^2 + (\dot{\theta} + \omega)^2 + 2 \omega (\dot{\theta} + \omega) \cos \theta]$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m a^2 (\dot{\theta} + \omega + \omega \cos \theta) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m a^2 (\ddot{\theta} - \omega \dot{\theta} \sin \theta) \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -m a^2 (\dot{\theta} + \omega) \sin \theta, \quad \therefore Q_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1, \quad i=1, 2 \quad \text{فتكون معادلات لاگرانج:}$$

$$m a^2 (\ddot{\theta} - \omega \dot{\theta} \sin \theta) + m a^2 \omega (\theta + \omega) \sin \theta = 0$$

ومنها نجد أن

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad (8)$$

وهذه تمثل حركة توافقية بسيطة ومحور الدوران هو  $oA$ . ويمكن حل المعادلة (8) لإيجاد السرعة والموضع.

### (ب) لإيجاد رد فعل السلك على الخرزة

تعتبر أن هناك إزاحة افتراضية صغيرة في اتجاه  $CB$  الذي يساوي  $r$  ولذلك سيوجد درجتان حرية  $r, \theta$  (لأن  $r$  أصبح متغير) حيث أن القوة في اتجاه  $r$  هي  $Q_r = R$  من الشكل نجد أن:

$$x = a \cos \omega t + r \cos (\omega t + \theta)$$

$$y = a \sin \omega t + r \sin (\omega t + \theta)$$

$$\dot{x} = -a \omega \sin \omega t + \dot{r} \cos (\omega t + \theta) - r (\omega + \dot{\theta}) \sin (\omega t + \theta)$$

$$\dot{y} = \omega a \cos \omega t + \dot{r} \sin (\omega t + \theta) + r (\omega + \dot{\theta}) \cos (\omega t + \theta)$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m [a^2 \omega^2 + \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta} + \omega)^2 + 2 a \omega \dot{r} \sin \theta$$

$$+ 2 a \omega r (\dot{\theta} + \omega) \cos \theta] \quad (9)$$

معادلة لاجرانج

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \quad (10)$$

حساب  $\frac{\partial T}{\partial r}$  ، ثم التعويض في (5) بعد وضع  $Q_r = R$  نحصل على

$$R = m \left[ \ddot{r} + a \omega \dot{\theta} \cos \theta - r (\dot{\theta} + \omega)^2 - r (\dot{\theta} + \omega)^2 - a \omega (\dot{\theta} + \omega) \cos \theta \right] \quad (11)$$

والآن يمكننا بالنسبة للإزاحة نعود ونهملها أي أن  $r = a, \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$  فتحصل على

$$R = -m a [\omega^2 \cos \theta + (\omega + \dot{\theta})^2]$$

هذا هو رد فعل السلك على الخرزة وهو في اتجاه نصف القطر للداخل.

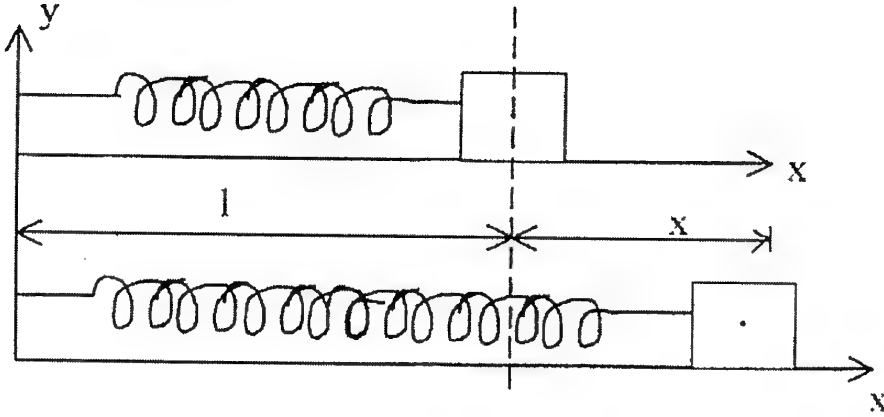
## ثانياً: تطبيقات على استخدام معادلات لاجرانج

## أولاً: المتذبذب التوافقي البسيط:

الكتلة  $m$  موضوعة على منضدة أفقية ملساء ممثلة بالمحور  $x$  وهى مثبتة في إحدى طرفي زنبرك، بينما طرف الزنبرك الآخر مثبت عند نقطة  $B$ .

الطول الطبيعي للزنبرك هو  $\ell$  وكتلته يمكن إهمالها إذا أزيحت الكتلة  $m$  على طول المحور  $x$  ثم تركت فإنها سوف تهتز أو تتذبذب إلى الأمام وإلى الخلف حول موضع الاتزان  $O$ .

شكل (٢- ١١)



## ❖ إيجاد معادلة الحركة:

عند اللحظة التي يكون فيها طول الزنبرك  $\ell + x$  (شكل ب) توجد قوة تحاول إرجاع الكتلة  $m$  إلى موضع اتزانها. وحسب قانون "هوك" تسمى هذه القوة "قوة الاسترداد" وتتناسب مع الاستطالة  $x$  وتعطى من:

$$\vec{F} = -k x \vec{i} \quad (1)$$

حيث  $k$  ثابت التناسب،  $\vec{i}$  متجه الوحدة في الاتجاه الموجب لمحور  $x$ .

باستخدام القانون الثاني لنيوتن يكون لدينا:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -k \vec{x}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

هذه المنظومة الاهتزازية تسمى "المتذبذب التوافقي البسيط" أو المتذبذب التوافقي الخطي ويطلق على هذا النوع من الحركة بالحركة التوافقية البسيطة.

### ❖ السعة والزمن الدوري والتردد:

يمكن حل المعادلة التفاضلية (٢) والحصول على  $x$  كدالة في الزمن وتعيين الثوابت بمعرفة الشروط الابتدائية.

فإذا كانت هذه الشروط على سبيل المثال على الصورة:

$$\text{عندما } t=0 \quad \text{فإن: } \frac{dx}{dt} = 0, \quad x = A$$

فتجد أن حل المعادلة (٢) يصبح:

$$x = A \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

حيث  $A$  هو سعة الحركة وهو المسافة التي تكون أكبر إزاحة من موضع الاتزان. والزمن الدوري للحركة هو زمن ذبذبة كاملة وهو يعطى من:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

والتردد هو عدد الذبذبات أو الدورات الكاملة في وحدة الزمن ويرمز له بالرمز  $\nu$  ويعطى من:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

وفي الحالة العامة يكون الحل العام للمعادلة (٢) هو:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (6)$$

وهذا الحل يمكن كتابته على الصورة:

$$x = c \cos (\omega t - \phi) \quad (7)$$

$$c = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{B}{A}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{حيث:}$$

والسعة في هذه الحالة هي  $c$  بينما يبقى الزمن الدوري كما هو في (٤) والتردد كما هو في (٥) أي أنهما لا يتأثران بالتغير في الشروط الابتدائية.

$\phi$  تسمى زاوية الطور وتختار بحيث  $0 \leq \phi \leq \pi$  وإذا كانت  $\phi = 0$  فإن المعادلة (٧) تتحول إلى (٣).

### ❖ طاقة المتذبذب التوافقي البسيط:

إذا كانت  $T$  هي طاقة الحركة،  $V$  هي طاقة الجهد،  $E$  هي الطاقة الكلية للمتذبذب التوافقي البسيط فإنه يكون:

$$E = T + V \quad (1)$$

ويمكن توضيح ذلك كالتالي، المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب التوافقي البسيط هي:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x \quad (2)$$

وحيث أن:  $\frac{d^2 x}{dt^2} = v \frac{dv}{dx}$  فإن (٢) تصبح:

$$mv \frac{dv}{dx} = -k x \quad (3)$$

بفصل المتغيرات ثم التكامل نجد أن :

$$\int mv dv = -k \int x dx \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 = -\frac{1}{2} k x^2 + c$$

ومنها نجد أن:  $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = c$

**مثال ١٦:**

أ- أثبت أن القوة  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  التي تؤثر على المتذبذب التوافقي البسيط تكون محافظة ثم أوجد طاقة الجهد له. ب- أوجد دالة لاجرانج ومعادلة الحركة.

**الحل**

$\vec{F}$  تكون محافظة إذا كان  $\text{curl } \vec{F} = \vec{0}$  أي أن:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -kx & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

إذا  $\vec{F}$  محافظة وطاقة الجهد تعطى من:

$$\begin{aligned} \vec{F} = -\vec{\nabla} V &\Rightarrow -kx\vec{i} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \\ \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = kx \end{aligned}$$

ومن هذا ينتج أن:  $V = \frac{1}{2}kx^2 + c$

وبفرض أن:  $V = 0$  عندما  $x = 0$  فنجد أن  $c = 0$  وينتج أن  $V = \frac{1}{2}kx^2$

❖ طريقة أخرى لإيجاد طاقة الجهد للمتذبذب التوافقي:

$V = -(\text{الشغل المبذول})$

$$V = - \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = - \int [(-kx \vec{i}) \cdot d\vec{x} \vec{i}] = \int kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2 + c$$

حيث  $c$  ثابت التكامل ويمكن تعيينه من الشروط كما سبق فيكون:  $V = \frac{1}{2} kx^2$

ب- إذا رمزنا لإزاحة الكتلة من موضع الاتزان بالرمز  $x$  وكذلك نفرض أن الإحداثي المعمم هو  $q = x$

وعلى ذلك تصبح طاقة الحركة على الصورة التالية:  $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

وطاقة الموضع (تم إيجادها من قبل) هي:  $V = -\frac{1}{2} kx^2$

ودالة لاگرانج تصبح:  $L = T - V$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

معادلة لاگرانج:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = kx$$

إذا معادلة الحركة تصبح:  $m\ddot{x} = -kx$  أو  $m\ddot{x} + kx = 0$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة. ينطبق عليها كل ما قيل عنها من قبل من حل وتتردد وزمن دوري.

## Vibrating Systems

### ثانياً: مجموعات الجسيمات المهتزة

#### الترددات العادية والنسق العادي للتردد

إذا وصل جسيما (أو أكثر) بواسطة زنبرك (أو تبادلا التأثير بأي طريقة مكافئة) فإنهما سوف يتذبذبان أو يهتزان بالنسبة لبعضهما.

وكما نعلم أن الجسيم المهتز أو المتذبذب، مثل المتذبذب التوافقي البسيط أو ثقل البندول البسيط يكون له تردد واحد للتذبذب. أما في حالة مجموعات الجسيمات،

فيوجد بصفة عامة أكثر من تردد للتذبذب. مثل هذه الترددات تسمى (الترددات العالية)، وحركات الجسيمات في هذه الأحوال تسمى أحيانا (الاهتزازات الدورية المتعددة).

(نمط) نسق الاهتزاز (أي الطريقة الخاصة التي يحدث بها الاهتزاز، نتيجة شروط ابتدائية خاصة مثلا) الذي يوجد فيه فقط أحد الترددات العادية يسمى "النسق العادي للاهتزاز" أو للتبسيط "النسق العادي". (النمط) النسق العادي للاهتزاز - حالة التذبذب الأساسية Normal mode of vibration.

**مثال ١٧:** (الحل باستخدام طريقة الميكانيكا الكلاسيكية)

وصلت كتلتان متساويتا الكتلة  $m$  بثلاث أسلاك زنبركية، لها نفس ثابت الزنبرك  $k$  كما هو موضح بالشكل (٢- ١٢) بحيث تزلق كل كتلة بحرية على منضدة ملساء  $AB$ . حائطا اتصال الزنبركين عند  $A, B$  مثبتان أوجد المعادلات التفاضلية لحركة الكتلتين. وتسمى هذه المنظومة بالمتذبذبات التوافقية المزدوجان:

### الحل

شكل (٢- ١٢)



نفرض أن  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  شكل (٢- ١٣) يرمزان إلى إزاحتي الكتلتين عن موضعي اتزانهما  $C, D$  عند أي لحظة  $t$ .

القوى المؤثرة على الكتلة الأولى عند  $P$  هي:

(i) قوة نتيجة للزنبرك إلى اليمين تعطى من:  $\vec{k}(x_2 - x_1) \vec{i}$

(ii) قوة نتيجة للزنبرك إلى اليسار تعطى من:  $-\vec{k} x_1 \vec{i}$

وبذلك تكون القوة الكلية المؤثرة على الكتلة الأولى عند P هي:

$$k(x_2 - x_1) \vec{i} - k x_1 \vec{i} = k(x_2 - 2x_1) \vec{i}$$

بنفس الطريقة تكون القوى الكلية المؤثرة على الكتلة الثانية عن D هي:

$$k(x_1 - x_2) \vec{i} - k x_2 \vec{i}$$

عندئذ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن يكون لدينا:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 \vec{i}) &= k(x_2 - x_1) \vec{i} - k x_1 \vec{i} \\ m \frac{d^2}{dt^2} (x_2 \vec{i}) &= k(x_1 - x_2) \vec{i} - k x_2 \vec{i} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

أو:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= k(x_2 - 2x_1) \\ m \ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

وهذه هي معادلة الحركة.

### مثال ١٨:

المطلوب حل المثال السابق ولكن بطريقة معادلات لاجرانج. ثم أوجد الترددات العادية ثم أوجد النسق العادي للتردد.

### الحل

إذا رمزنا لإزاحة الكرة الأولى من موقع الاتزان بالرمز  $x_1$  وللكرة الثانية

بالرمز  $x_2$  فإن التغيرات في طول الأسلاك الثلاثة هي:

$$x_1, \quad x_2 - x_1, \quad -x_2$$

إن طاقة الجهد لسلوك مثال (السلوك الذي يخضع لقانون هوك) يساوي  $\frac{1}{2} k x^2$ . وعندئذ

يمكن كتابة طاقة الموضع (أو الجهد) للنظام الحالي كالآتي:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} (k) (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k (-x_2^2)^2 \\
&= \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 - k x_1 x_2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \\
&= -k x_1 x_2 + k x_1^2 + k x_2^2 \\
T &= \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2
\end{aligned}$$

والآن يمكن حساب دالة لاجرانج ومعادلات لاجرانج كالتالي:

$$L = T - V$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + k x_1 x_2 - k x_1^2 - k x_2^2 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m \dot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m \ddot{x}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = k x_2 - 2 k x_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m \dot{x}_2, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m \ddot{x}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = k x_1 - 2 k x_2 \\
&\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0
\end{aligned}$$

$$m \ddot{x}_1 = k(x_2 - 2 x_1), \quad m \ddot{x}_2 = k(x_1 - 2 x_2)$$

وهاتان هما معادلتا الحركة.

(ii) إيجاد التردد العادي:

في المعادلتين (١)، (٢) نعتبر أن:

$$x_1 = A_1 \cos \omega t, \quad x_2 = A_2 \cos \omega t$$

عندئذ بعد الاختصار يكون لدينا:

$$(2k - m \omega^2) A_1 - k A_2 = 0 \quad (3)$$

$$-k A_1 + (2k - m \omega^2) A_2 = 0 \quad (4)$$

والآن إذا كان كل من  $A_2, A_1$  لا يساوي الصفر فيجب أن يكون لدينا:

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

يسمى هذا المحدد بالمحدد المميز - معادلة التردد أو:

$$(2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

$$m^2 \omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

وبالحل بالنسبة إلى  $\omega^2$  نجد أن:

$$\omega^2 = (4km \pm \sqrt{16k^2m^2 - 12k^2m^2}) / (2m^2)$$

$$\omega^2 = (3k)/m, \quad \omega^2 = k/m \quad \text{وهذا يعطى:}$$

وعلى ذلك يكون الترددان العاديان (أو الطبيعيان) للمجموعة هما:

$$v_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(3k)/m}, \quad v_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}$$

الترددات العادية تسمى أيضا الترددات المميزة والمحدد (5) يسمى المحدد المميز أو (معادلة التردد).

(iii) لإيجاد النسق العادي المناظر لـ  $\omega = \sqrt{k/m}$  نعتبر أن:  $\omega^2 = k/m$  في المعادلتين

$$(4), (2) \text{ عندئذ نجد أن: } A_1 = A_2$$

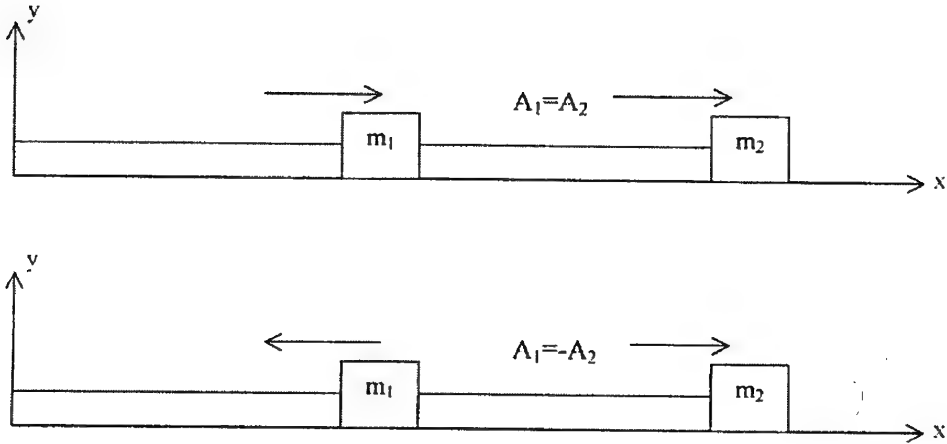
والنسق العادي للتذبذب في هذه الحالة يناظر حركة الكتلتين في نفس الاتجاه (كلاهما إلى اليمين أو كلاهما إلى اليسار) شكل (٢ - ١١).

وبالمثل لإيجاد النسق العادي الذي يناظر  $\omega = \sqrt{(3k/m)}$  نعوض بـ

$$\omega^2 = (3k)/m \text{ في المعادلتين (٣)، (٤) فنجد أن: } A_1 = -A_2$$

والنسق العادي للمتذبذب في هذه الحالة يناظر حركة الكتلتين في اتجاهين متضادين (أي عندما تحرك إحدى الكتلتين إلى اليمين تتحرك الأخرى إلى اليسار والعكس بالعكس).

(٢- ١٢)



ملاحظة:

عند دراسة هذه المسألة يمكننا أيضا إيجاد الحلول:

$$x_1 = B_1 \sin \omega t, \quad x_2 = B_2 \sin \omega t$$

$$\text{أو: } x_1 = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t, \quad x_2 = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$$

$$\text{أو: } x_1 = c_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = c_2 e^{i\omega t}$$

### ثالثا: معادلات لا جرانج للمجموعات غير تامة التقييد

Lagrange's Equations for Non-Holonomic systems

افترض وجود  $m$  معادلة تقييد على الصورة:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} dq_{\alpha} + A dt = 0, \quad \sum_{\alpha} B_{\alpha} dq_{\alpha} + B dt = 0, \dots \quad (1)$$

أو بصورة مكافئة:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} + A = 0, \quad \sum_{\alpha} B_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} + B = 0, \dots \quad (2)$$

يجب بالطبع أن يكون لدينا  $m < n$  حيث  $n$  هو عدد الإحداثيات  $q_{\alpha}$ .

المعادلات (١)، (٢) قد يمكن أو لا يمكن تكاملها للحصول على علاقة تشمل على جميع  $q_\alpha$ . إذا كان لا يمكن تكاملها فإن القيود تكون غير تامة أو غير ممكنة التكامل وإلا فإنها تكون تامة أو ممكنة التكامل. على أي حال فغن معادلات لاگرانج يمكن استبدالها

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \dots \quad (3)$$

حيث تسمى البارامترات  $\lambda_1, \lambda_2$  "مضاعفات لاگرانج". إذا كانت القوي محافظة فإن (٣) يمكن كتابتها بدالة دالة لاگرانج  $T - V = L$  على الصورة:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \dots \quad (4)$$

يجب أن نوضح أن النتائج السابقة يمكن تطبيقها على المجموعات نامة التقييد (سواء بسواء مثل المجموعات غير تامة التقييد)، حيث أن شرط التقييد يمكن بعد التفاضل تحويله على الصورة:

$$\phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad (5)$$

على الصورة:

$$\sum_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = 0 \quad (6)$$

التي هي نفسها صورة (١) لمعادلات لاگرانج:

### مثال ١:

استنتج معادلات لاگرانج الغير تامة التقييد التي لها الصورة التالية:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \dots \quad \text{للقيد الغير تامة.}$$

### الحل

افترض وجود  $m$  شرطاً مقيداً على الصورة:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} dq_{\alpha} + A dt = 0, \quad \sum_{\alpha} B_{\alpha} dq_{\alpha} + B dt = 0, \dots \quad (1)$$

حيث  $m < n$  عدد الإحداثيات  $q_{\alpha}$ .

وكما في المثال (٥) في معادلات لاگرانج لدينا:

$$Y_{\alpha} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = \sum_v m_v \ddot{r}_v \cdot \frac{dr_v}{dq_{\alpha}} \quad (2)$$

إذا كانت  $\delta r_v$  هي الإزاحات الافتراضية التي تحقق القيود للحظية (النتيجة باعتبار الزمن  $t$  ثابتاً) فإن:

$$\delta r_v = \sum_{\alpha} \frac{\partial r_v}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} \quad (3)$$

والآن الشغل الافتراضي هو:

$$\delta W = \sum_v m_v \ddot{r}_v \cdot \delta r_v = \sum_v \sum_{\alpha} m_v \ddot{r}_v \cdot \frac{\partial r_v}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} = \sum_{\alpha} Y_{\alpha} \delta q_{\alpha} \quad (4)$$

وحيث أن الشغل الافتراضي يمكن كتابته بدلالة القوي المعممة  $\phi_{\alpha}$  على الصورة:

$$\delta W = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha} \delta q_{\alpha} \quad (5)$$

فإنه بالطرح بين (٥)، (٤)، يكون لدينا:

$$\sum_{\alpha} (Y_{\alpha} - \phi_{\alpha}) \delta q_{\alpha} = 0 \quad (6)$$

وحيث أن  $\delta q_{\alpha}$  ليست جميعها مستقلة فإنه لا يمكننا استنتاج أن  $Y_{\alpha} = \phi_{\alpha}$  التي ستؤدي إلى معادلات لاگرانج.

من (١) حيث أن الزمن  $t$  ثابت للقيود اللحظية فإنه يكون لدينا  $m$  معادلة على الصورة:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} \delta q_{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} B_{\alpha} \delta q_{\alpha} = 0, \dots \quad (7)$$

وبالضرب في مضاعفات لاجرانج  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  ثم بالجمع يكون لدينا:

$$\sum_{\alpha} (\lambda_1 A_{\alpha} + \lambda_2 B_{\alpha} + \dots) \delta q_{\alpha} = 0 \quad (8)$$

بالطرح بين (٦)، (٧) نحصل على:

$$\sum_{\alpha} (Y_{\alpha} - \phi_{\alpha} - \lambda_1 A_{\alpha} - \lambda_2 B_{\alpha} - \dots) \delta q_{\alpha} = 0 \quad (9)$$

والآن بسبب المعادلات (٧) يمكن الحل لعدد  $m$  من الكميات  $\delta q_{\alpha}$  مثل  $(\delta q_1, \dots, \delta q_m)$  بدلالة  $\delta q_{\alpha}$  الباقية أي  $m-n$  مثل  $(\delta q_{m+1}, \dots, \delta q_n)$  بناء على ذلك فإنه في (٩) يمكن اعتبار  $(\delta q_1, \dots, \delta q_m)$  غير مستقلة و  $(\delta q_{m+1}, \dots, \delta q_n)$  مستقلة.

واختياريا سوف نجعل معاملات المتغيرات الغير مستقلة تساوى صفرا أي أن:

$$Y_{\alpha} - \phi_{\alpha} - \lambda_1 A_{\alpha} - \lambda_2 B_{\alpha} - \dots = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

وبذلك سوف يبقى في المجموع (٩) فقط الكميات المستقلة  $\delta q_{\alpha}$  وبما أن هذه الكميات اختيارية فينتج أن معاملاتهما تساوى صفرا أي أن:

$$Y_{\alpha} - \phi_{\alpha} - \lambda_1 A_{\alpha} - \lambda_2 B_{\alpha} - \dots = 0 \quad \alpha = m+1, \dots, n \quad (11)$$

ونحصل من المعادلات (٢)، (١٠)، (١١) على:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = \phi_{\alpha} + \lambda_1 A_{\alpha} + \lambda_2 B_{\alpha} + \dots \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

كما هو مطلوب. هذه المعادلات مع (١) تعطي  $n+m$  معادلة بها  $n+m$  مجهول

### رابعا: معادلات لاگرانج والقوى الدفعية

نعلم أن القوة الدفعية هي قوة كبيرة مؤثرة لفترة زمنية صغيرة. فإذا فرضنا أنه في زمن  $\Delta t$  مطلوب إيجاد دفع القوة  $Q_\alpha$ .

فمن معادلة لاگرانج بالضرب في  $dt$  والتكامل في الفترة  $[t, t + \Delta t]$  نحصل على

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) dt - \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} Q_\alpha dt$$

التكامل الثاني في الطرف الأيسر يختفي عندما تكون  $\Delta t$  صغيرة جداً ومن

ثم تظل  $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$  محدودة في تلك الفترة والطرف الأيمن التكامل لا يتلاشى حيث أن

قوى الدفع كبيرة بالرغم من الفترة القصيرة التي تحدث فيها ومن ثم نحصل على :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right|_{t+\Delta t} - \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right|_t = I$$

وهذا هو نفس المفهوم في قوانين نيوتن حيث أن الدفع واضح أنه يساوي التغير

في كمية الحركة أثناء فترة الدفع وعند حساب الدفع سنأخذ في الاعتبار أن هناك قوى لها تغير طفيف يمكن إهمالها مثل القوى المرنة والتصادمات ... وكذلك التغير الطفيف في إحداثيات المجموعة.

### مثال ٢:

استنتج معادلات المجموعات المحافظة غير تامة التقييد التي لها الصورة التالية:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \dots$$

### الحل

من مثال (١) السابق لدينا:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \dots \quad (1)$$

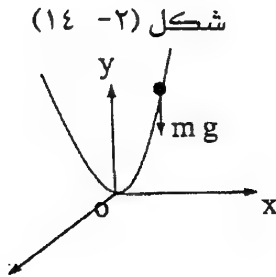
وإذا كانت القوي يمكن اشتقاقها من الجهد فإن  $\phi_\alpha = -\partial V / \partial q_\alpha$  حيث  $V$  لا تعتمد على  $q_\alpha$ . وحيث أن دالة لاجرانج لها الصورة:  $L = T - V$  وبذلك يمكن كتابة (١) على الصورة:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \dots \quad (2)$$

### مثال ٣:

جسيم كتلته  $m$  يتحرك تحت تأثير الجاذبية على السطح الداخل للجسم المكافئ الدوراني  $x^2 + y^2 = az$ ، بفرض أن السطح لا احتكاكي احصل على معادلات الحركة.

### الحل



شكل (٢-١٤)

دالة لاجرانج تعطى في الإحداثيات الأسطوانية من العلاقة التالية:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad (1)$$

$$-mgz$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{وحيث أن:}$$

فإن شرط التقيد يكون:  $\rho^2 - az = 0$  وينتج أن:

$$2\rho\delta\rho - a\delta z = 0 \quad (2)$$

إذا جعلنا:

$q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \phi$ ,  $q_3 = z$  وقارنا (٢) بالمعادلات (٧) في المثال السابق نرى أن:

$$A_1 = 2\rho, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -a \quad (3)$$

حيث أن قيدها واحدا فقط موجود. وبذلك يمكن كتابة معادلات لاجرانج على الصورة:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3$$

أي أن:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 2\lambda_1 \rho, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = -\lambda_1 a$$

وباستخدام (١) فإن هذه المعادلات تصبح:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = 2\lambda_1 \rho \quad (4)$$

$$m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (5)$$

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 a \quad (6)$$

وأيضاً لدينا شرط التقييد:

$$2\rho\dot{\rho} - a\dot{z} = 0 \quad (7)$$

المعادلات الأربع (٤)، (٥)، (٦)، (٧) تمكّننا من إيجاد المجاهيل الأربعة:  $\rho, \phi, z, \lambda_1$

#### مثال ٤:

- (أ) أثبت أن الجسيم في المثال (٣) السابق سوف يرسم دائرة أفقية في المستوى  $z = h$  إذا أعطيت سرعة زاوية مقدارها  $\omega = \sqrt{2g/a}$ .
- (ب) أثبت أنه إذا أزيح هذا الجسيم قليلاً عن هذا المسار الدائري فإنه سوف يتذبذب حول المسار بتردد يعطى من:  $(1/\pi)\sqrt{2/ga}$ .
- (ج) ناقش استقرار الجسيم في المسار الدائري.

#### الحل

- (أ) نصف قطر الدائرة كما نحصل عليه من تقاطع المستوى  $z = h$  مع مجسم القطع المكافئ  $p^2 = az$  هو:

$$\rho_0 = \sqrt{ah} \quad (1)$$

بوضع  $z = h$  في المعادلة (٦) في المثال السابق نجد أن:

$$\lambda_1 = -mg/a \quad (2)$$

عندئذ باستخدام (١)، (٢) في المعادلة (٤) من المثال السابق وبوضع  $\phi = \omega$  نجد أن:

$$m(-\rho_0 \omega^2) = 22(-mg/a)\rho_0$$

$$\omega = \sqrt{2g/a} \quad (3)$$

الزمن الدوري والتردد على هذا المسار الدائري يعطيان على الترتيب من:

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{a}}, \quad P_1 = 2\pi \frac{a}{2g} \quad (4)$$

(ب) من المعادلة (٥) في المثال السابق نجد أن:

$$A = \rho^2 \dot{\phi} = \text{ثابت} \quad (5)$$

بفرض أن الجسم يبدأ بسرعة زاوية  $\omega$  نجد أن:

وينتج أن:

$$\dot{\phi} = ah\omega / \rho^2 \quad (6)$$

وحيث أن التذبذب يحدث بالقرب من المستوي  $z = h$  فإننا نجد بوضع  $z = h$  في المعادلة

(٦) من المثال السابق أن:

$$\lambda_1 = -mg/a \quad (7)$$

باستخدام (٦)، (٧) في المعادلة (٤) من المثال السابق نجد أن:

$$\ddot{\rho} - a^2 h^2 \omega^2 / \rho^3 = -2g\rho/a \quad (8)$$

والآن إذا كان المسار يحيد قليلا عن الدائرة فإن  $\rho$  سوف تحيد قليلا عن  $\rho_0$  هذا

يجعلنا نجري التحويل

$$\rho = \rho_0 + u \quad (9)$$

في (٨) حيث  $u$  صغيرة بالنسبة إلى  $\rho_0$  عندئذ (٨) تصبح:

$$\ddot{u} - \frac{a^2 h^2 \omega^2}{(\rho_0 + u)^3} = -\frac{2g}{a}(\rho_0 + u) \quad (10)$$

لكن إلى درجة تقريب عالية لدينا:

$$\frac{1}{(\rho_0 + u)^3} = \frac{1}{\rho_0^3 (1 + u/\rho_0)^3} = \frac{1}{\rho_0^3} \left(1 + \frac{u}{\rho_0}\right)^{-3} = \frac{1}{\rho_0^3} \left(1 - \frac{3u}{\rho_0}\right)$$

باستخدام نظرية ذات الحدين حيث أننا أهملنا الحدود المشتملة على  $u^2, u^3, \dots$  وباستخدام قيم  $\rho_0$  المعطاة من (١)، (٣) على الترتيب فإن (١٠) تصبح:

$$u + (8g/a)u = 0 \quad (5)$$

$$u = \varepsilon_1 \cos \sqrt{8g/at} + \varepsilon_2 \sin \sqrt{8g/at} \quad \text{وحلها هو:}$$

عندئذ يكون:

$$\rho = \rho_0 + u = \sqrt{ha} + \varepsilon_1 \cos \sqrt{8g/at} + \varepsilon_2 \sin \sqrt{8g/at}$$

ينتج من ذلك أنه إذا أزيح الجسم قليلا عن المسار الدائري الذي نصف قطره  $\rho_0 = \sqrt{ah}$  فإنه سوف يتذبذب حول المسار بتردد:

$$\rho_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(8g)/a} = \frac{1}{\pi} \sqrt{(2g)/a} \quad (6)$$

وزمن دوري:

$$p_2 = \pi \sqrt{a/(2g)} \quad (7)$$

لاحظ أن الزمن الدوري للتذبذب في المسار الدائري المعطى من (٤) يكون ضعف الزمن الدوري للتذبذب حول المسار الدائري المعطى من (٧).  
(ج) حيث أن الجسم يميل إلى أن يعود إلى المسار الدائري عندما يزاح قليلا عنه فإن الحركة تكون مستقرة.

#### مثال ٥:

ناقش المعنى الفيزيائي لمضاعفات لاجرانج  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  في المثال (٣) من الشغل وطاقة الحركة والقوي المعممة.

### الحل

في حالة عدم وجود قيود على الحركة فإنه باستخدام المثال (٥) في معادلات لاگرانج تكون معادلات الحركة هي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \phi_\alpha$$

وفي حالة وجود قيود على الحركة فإنه باستخدام المثال (١) من معادلات لاگرانج للمجموعات الغير تامة التقييد تكون معادلات الحركة هي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \dots$$

وينتج أن الحدود:  $\lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \dots$

تناظر القوي المعممة المصاحبة للقيود فيزيائيا وتكون مضاعفات لاگرانج مصاحبة للقوى المقيدة التي تؤثر على المجموعة وبذلك فإنه عند تعيين مضاعفات لاگرانج يلزم اعتبار تأثير القوى المقيدة بدون إيجادها صراحة.

### مثال ٦ :

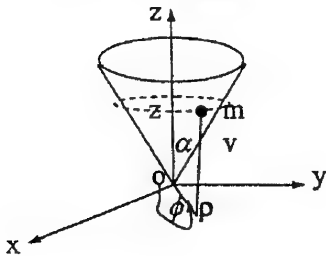
يتحرك جسيم كتلته  $m$  على السطح الداخلي لمخروط دائري قائم (رأسه لأسفل) ونصف زاوية رأسه  $\alpha$  تحت تأثير الجاذبية فقط. صف حركة الجسيم ؟

### الحل

بأخذ الجسيم في وضع عام يتحدد بدلالة الإحداثيات  $(\rho, \phi, z)$  كإحداثيات معمة ويلاحظ أن:

$$z = \rho \cot \alpha \quad (1)$$

شكل (٢- ١٥)



أي  $z, \rho$  لا يكونان مستقلان وبالتالي فإن (1) هي معادلة القيد والتي تخفض درجات الحرية من ثلاثة إلى اثنتين  $\rho, \phi$  (وسوف تحذف  $z$ ). باستخدام معادلة القيد، طاقة الحركة للجسيم  $m$  هي :

$$T = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2]$$

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{\rho}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + \rho^2 \dot{\phi}^2]$$

$$V = m g z = m g \rho \cot \alpha$$

طاقة الجهد ستكون:

دالة لا جرانج تصبح:

$$\therefore L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + \rho^2 \dot{\phi}^2) - m g \rho \cot \alpha$$

نوجد:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} \operatorname{cosec}^2 \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m \rho \dot{\phi}^2 - m g \cot \alpha$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) = m \ddot{\rho} \operatorname{cosec}^2 \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \rho^2 \dot{\phi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

بالتعويض في معادلة لا جرانج

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \quad q_1 = \rho, \quad q_2 = \phi$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \sin \alpha + g \cos \alpha \sin \alpha = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (m \rho^2 \dot{\phi}) = 0 \Rightarrow m \rho^2 \dot{\phi} = \cos t$$

والمعادلة الأخيرة تمثل العزم الزاوي حول المحور  $z$  وهي تمثل قانون ثبوت العزم الزاوي حول محور التماثل في مجال الجاذبية.

## تمارين

- ١- أوجد دالة لاجرانج لجسيم كتلته  $m$  يسقط بحرية في مجال جاذبية منتظم.  
(ب) أكتب معادلات لاجرانج.
- ٢- أعد حل المسألة السابقة بالنسبة لمجال قوة جاذبية تتغير عكسيا مع مربع البعد عن نقطة مثبتة  $O$  بفرض أن الجسيم يتحرك في خط مستقيم خلال  $O$ .
- ٣- استخدم معادلات لاجرانج لتصف حركة جسيم كتلته  $m$  إلى أسفل مستوي مائل لا احتكاكي زاويته  $\alpha$ .
- ٤- استخدم معادلات لاجرانج في وصف حركة مقذوف أطلق بسرعة  $v$  في اتجاه يصنع زاوية  $\alpha$  مع الأفقي.
- ٥- استخدم معادلات لاجرانج في حل مسألة مذئذب توائي:  
(أ) ثنائي البعد (ب) ثلاثي الأبعاد
- ٦- جسيم كتلته  $m$  متصل بنقطة مثبتة  $P$  على مستوي أفقي بواسطة خيط طوله  $l$  المستوي بدور بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$  حول محور رأسي يمر بنقطة  $O$  على المستوي، حيث  $Op = a$ .  
أوجد: أ- دالة لاجرانج للمجموعة ب- أكتب معادلات الحركة للجسيم
- ٧- الإحداثيات المتعامدة  $(x, y, z)$  التي تعرف موضع جسيم كتلته  $m$  يتحرك في مجال قوة جهد  $V$  معطاة بدلالة الإحداثيات الكروية  $(r, \phi, \theta)$  بواسطة معادلات التحويل.  
$$x = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \phi$$

استخدم معادلات لاجرانج في إيجاد معادلات الحركة:

٨- أعد حل المسألة ٧ إذا كان الجسم لا يتحرك بالضرورة في خط مستقيم يمر خلال ٥ .

٩- إذا تحرك جسم كتلته  $m$  وشحنته  $e$  بسرعة  $\vec{v}$  في مجال كهربائي  $\vec{E}$  ومجال مغناطيسي  $\vec{B}$  فإن القوة المؤثرة عليه تعطي من:  $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  يمكن التعبير عن المجالين بدلالة الجهد القياسي  $\phi$  والجهد الإتجاهي  $\vec{A}$  بالعلاقين:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial\vec{A}/\partial t, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

أثبت أن دالة لاجرانج التي تعرف حركة مثل هذا الجسم هي:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + e(\vec{A} \cdot \vec{v}) - e\phi$$

١٠- أوجد دالة لاجرانج للبندول الثلاثي ثم أوجد معادلات الحركة، ثم احصل علي الترددات العادية للتذبذب والنسق العادي لكل تردد بالنسبة للبندول الثلاثي، كذلك اعتبر انفس المسألة عندما يكون الطولان والكتلتان غير متساويتين.

١١- زنبرك رأسي ثابتة  $k$  وكتلته  $M$ . إذا وضعت كتلة  $m$  على الزنبرك وتركت لتتحرك فاستخدم معادلات لاجرانج لإثبات أن المجموعة سوف تتحرك حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري  $2\pi\sqrt{(M+3\omega)3k}$

١٢- استخدم طريقة معادلات لاجرانج للمجموعات الغير تامة التقيد في حل مسألة جسم كتلته  $m$  ينزلق إلى أسفل على مستوي مائل لا احتكاكيا زاويته  $\alpha$ .

١٣- حل المسألة الآتية مستخدما طريقة معادلات لاجرانج للمجموعات الغير تامة التقيد: وضعت كتلتان  $m_1, m_2$  علي مستويين أملسين مائلين بالزاويتين  $\alpha_1, \alpha_2$  علي الكتلتين غير مرزن ولا وزن له ويمر علي مسمار أملس عند  $A$  أوجد عجلتي الكتلتين.

# الفصل الثالث

## معادلات هاملتون Hamilton's Equations

- \* مقدمة
- \* تعريف كمية الحركة المعممة
- \* تعريف دالة هاملتون
- \* استنتاج معادلات هاملتون
- \* أمثلة وتمارين

## الفصل الثالث

### معادلات هاملتون

### Hamilton's Equations

#### ١-٣ مقدمة

معادلات هاملتون للحركة للمجموعة الديناميكية تعتمد على دالة تسمى دالة هاملتون، ويرمز لها بالرمز  $H$  وهي دالة في الإحداثيات المعممة وكميات الحركة المعممة والزمن ولا تظهر السرعة المعممة  $\dot{q}_\alpha$  صراحة فيها أي

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$$

أي أن

$$H = H(q_\alpha, p_\alpha, t)$$

حيث  $p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$  هي كمية الحركة المعممة.

وسنرى كيفية تكوين معادلات هاملتون والتي هي أساس لما يسمى ديناميكا هاملتون Hamilton Dynamics (وهي طريقة لمعالجة الديناميكا التحليلية) التي هي أسهل وأشمل وتتميز عن معادلات لاجرانج بأنها مجموعة من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والتي عددها  $(2n)$  بينما نعلم أن معادلات لاجرانج هي عدد  $n$  من المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية هذا وبالنسبة للمجموعات التي تعتمد دالة لاجرانج الخاصة بها صراحة على الزمن فيتبين لنا أن دالة هاملتون تكون ثابتة حركة (أي أنها تظل ثابتة أثناء الحركة) في حين لا تكون دالة لاجرانج كذلك. وقبل أن نعرف دالة هاملتون يجب تعريف ما يسمى كمية حركة العموم (أو المعممة)  $p_\alpha$  وكذلك كما عرفنا من قبل الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  والسرعات المعممة  $\dot{q}_\alpha$  والقوى المعممة  $Q_\alpha$ . والاستخدام الأكثر لمعادلات هاملتون يكون في ميكانيكا الكم والميكانيكا الإحصائية.

**تعريف كمية الحركة المعممة  $p_\alpha$  (الزخم المعمم أو العام):**  
Generalized Momentum

تعرف كمية الحركة المعممة  $p_\alpha$  المصاحبة للإحداثي المعمم  $q_\alpha$  بالصيغة التالية

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (1)$$

وإذا كان النظام محافظا فإن دالة لاجرانج لهذا النظام ستعطى بالمعادلة:

$$L = T - V \quad (2)$$

وفي هذه الحالة فإن الطاقة الكامنة للنظام (طاقة الجهد) ستعتمد فقط على الإحداثيات المعممة وبالتالي يصبح تعريف  $p_\alpha$  بدلالة دالة لاجرانج  $L$  بالصيغة التالية:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (3)$$

ويجب ملاحظة أن كمية الحركة المعممة تعتمد على :  $t, q_\alpha, \dot{q}_\alpha$   
وإذا رجعنا لمعادلات لاجرانج التي كانت على الصورة:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (4)$$

سنجد أن الحد الأول منها يمثل المعدل الزمني لتغير كمية الحركة المعممة  $\frac{d}{dt}(p_\alpha)$  بينما الحد الثاني فيها يمثل القوى المعممة والتي سنرمز لها بالرمز  $Q_\alpha$  والتي ستصبح في هذه الحالة على الصورة:

$$Q_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (5)$$

وعليه فإن معادلة لاجرانج للنظام المحافظ تصبح كالتالي:

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt} (p_\alpha) \quad (6)$$

ويلاحظ أنها تشبه بالشكل صيغة نيوتن لتعريف القوة إلا أنها ذات شمولية أكثر ومغزى أعمق لأنها لا تقتصر على نظام إحداثي خاص.

### تعريف دالة هاملتون

كون هاملتون دالة هاملتون من دالة لاجرانج. وحيث عرفنا من قبل أن دالة لاجرانج تعتمد على الإحداثيات والسرعات المعممة وقد يوجد الزمن صراحة أو لا من ثم يمكن كتابة

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

$$\therefore dL = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (7)$$

بالتعويض من (٣) ، (٤) في (٧) نجد أن:

$$dL = \sum_{\alpha=1}^n \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

والتي يمكن وضعها في الصورة:

$$dL = \sum_{\alpha=1}^n \dot{p}_\alpha dq_\alpha + d \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha dp_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (8)$$

$$d \left( \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \right) = - \sum_{\alpha=1}^n \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (9)$$

المقدار ما بين القوسين وصفه هاملتون مساوياً للدالة H أي

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \quad (10)$$

والمعادلة (9) يجب حذف السرعات المعممة حتى تصبح H دالة في الإحداثيات وكمية الحركة ودالة لاجرانج وذلك بوضع  $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$  فنحصل على n من المعادلات التي نحلها في المجاهيل  $\dot{q}_\alpha$  وتكون دالة هاملتون كدالة في الإحداثيات وكمية الحركة

والزمن أي  $H(q_\alpha, p_\alpha, t)$ . وإذا كانت  $L$  لا تعتمد على الزمن صراحة فإن  $H$  لا تعتمد صراحة على الزمن وتكون ثابت الحركة ولاثبات ذلك من المعادلة (9)

حيث أن  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$  فإن الدالة  $H$  تعتمد فقط على  $q_\alpha, p_\alpha$  فقط أي أن:

$$H = H(q_\alpha, p_\alpha) \quad (1) \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{dt} \right) \quad (11)$$

وبالتعويض في (11) بمعادلات هاميلتون القانونية التالية:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

فنجد أن:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n (-\dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha + \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha) = 0$$

وبالتالي  $(H(q_\alpha, p_\alpha) = \text{const.})$  وهى معادلة ثبوت الطاقة.

### ٢-٣ استنتاج معادلات هاميلتون Hamilton's Equations

أولاً: إذا كانت دالة هاميلتون دالة في الإحداثيات المعممة وكمية الحركة

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \quad (12)$$

$$\therefore dH = \sum p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \quad (13)$$

$$\text{بالتعويض عن } p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad \text{ينتج أن}$$

$$dH = \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{d}{dt} (p_\alpha) = \dot{p}_\alpha \quad \text{ولكن من معادلات لاگرانج}$$

بالتعويض في (14) ينتج أن :

$$dH = \sum \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha dq_\alpha \quad (15)$$

وحيث أن دالة هاملتون دالة في الإحداثيات المعممة وكميات الحركة المعممة أي  
إذن  $H = H(p_\alpha, q_\alpha)$

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha - \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \quad (16)$$

بمقارنة (15)، (16) نحصل على :

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad (17)$$

والمعادلة (17) تمثل معادلات هاملتون وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى وعددها  $2n$  فقط وهي متماثلة. وهذا يعنى في الهاملتونيان ندرس حركة إحداثيات أي نقطة في الفراغ ذات  $2n$  من الأبعاد  $p_\alpha, q_\alpha$  وترسم النقطة هذه مساراً في الفراغ أثناء حركة المجموعة في الفراغ العادي وتتحكم في حركة النقطة أو المجموعة معادلات هاملتون (11). ومعادلات هاملتون اسهل في حلها من معادلات لاجرانج لأنها من الرتبة الأولى.

**ملاحظة :** دالة هاملتون التي لا تعتمد صراحة على الزمن نظل ثابتة أثناء الحركة وتساوي الطاقة الكلية للمجموعة. وهذا يتضح من المعادلة (16)

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha - \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \\ &= - \sum \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum q_\alpha \dot{p}_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

والمعادلة (18) يمكن الوصول إليها مباشرة من الدالة  $H = H(q_\alpha, p_\alpha)$  والتي لا تحتوي على الزمن صراحة وذلك بالتفاضل بالنسبة إلى الزمن  $t$ .

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha \dot{p}_\alpha = 0\end{aligned}$$

بالتكامل فإن :

$$H = \text{const.} = E \quad (19)$$

حيث  $E$  ثابت يساوي مقدار الطاقة الكلية للمجموعة. ولإثبات ذلك نعلم أن المجموعات المحافضة تكون طاقة الحركة دالة برية في السرعة المعممة  $\dot{q}_\alpha$  وطبقاً لنظرية أويلر للدوال المتجانسة يكون

$$\sum_{\alpha=1}^n q_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = 2T$$

وحيث أن طاقة الوضع للمجموعة المحافضة لا تعتمد على السرعات فإن :

$$\sum \dot{q}_\alpha p_\alpha = 2T$$

بالتعويض عن ذلك في دالة هاملتون يكون

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = 2T - (T - V) = T + V = E \quad (20)$$

وتكون دالة هاملتون التي لا تعتمد صراحة على الزمن هي الطاقة الكلية للمجموعة الديناميكية وتكون مقدارها ثابت أثناء الحركة (المجموعة الديناميكية محافظة).

**ثانياً : إذا كانت دالة هاملتون تعتمد صراحة على الزمن :**

أي أن  $H = H(q_\alpha, p_\alpha, t)$  وكذلك  $L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$  في هذه الحالة تكون  $dH$  كالتالي :

$$dH = \sum p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha} + \sum \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} - \sum \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (21)$$

بالتعويض عن  $p_{\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$  ،  $\dot{p}_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}$  في (21)

$$dH = \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha} \dot{p}_{\alpha} dq_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (22)$$

وحيث أن  $H = H(p_{\alpha}, q_{\alpha}, t)$  إذن

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (23)$$

بمقارنة المعادلة (22)، (23) نحصل على :

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} , \quad \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

مما سبق نلاحظ انه إذا كانت  $L$  تعتمد على الزمن صراحة فإن  $H$  كذلك.

أما إذا لم تعتمد  $L$  على الزمن صراحة فكذلك  $H$  أي أن .

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{فإن} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

إذا كانت  $\dot{p}_{\alpha} = 0$  أي  $H=0$  وهذا معناه أن  $q_{\alpha}$  تكون إحداثي دوري أو مهمل

والعكس صحيح.

#### مثال ١ :

أثبت أنه إذا كانت دالة هاملتون  $H$  لا تعتمد صراحة على الزمن  $t$  فإنها تكون ثابتة.

الحل

حيث أن  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$  فإن الدالة  $H$  تعتمد فقط على  $q_s, p_s$  فقط أي أن:

$$H = H(q_s, p_s) \quad (1) \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{dp_s}{dt} \right) \quad (2)$$

وبالتعويض في (٢) بمعادلات هاملتون القانونية التالية:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

ف نجد أن:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{s=1}^n (-\dot{p}_s \dot{q}_s + \dot{p}_s \dot{q}_s) = 0$$

وبالتالي  $(H(q_s, p_s) = \text{const.})$  وهى معادلة ثبوت الطاقة.

**مثال ٢:**

أثبت أنه إذا كانت معادلات التحويل على الصورة:  $\bar{F}_i = \bar{F}_i(q_s)$  لا تعتمد على الزمن (أي أن  $\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial t} = 0$ ) فإن طاقة الحركة للمجموعة تكون دالة تريبعية متجانسة في سرعات العموم وإذا كانت  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_s} = 0$  بالإضافة إلى ذلك فإن:  $H = T + V = E$  حيث  $E$  الطاقة الكلية للمجموعة.

الحل

حيث أن:  $\bar{F}_i = \bar{F}_i(q_s)$

فإن:

$$\dot{\bar{F}}_i = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \quad (1)$$

طاقة الحركة للمجموعة تعطى من:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\bar{F}}_i \cdot \dot{\bar{F}}_i \quad (2)$$

بالتعويض من (١) في (٢) نجد أن:

$$T = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (3)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{kj}(q_s) \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (4)$$

حيث:

$$a_{kj}(q_s) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \quad (5)$$

واضح من المعادلة (٤) أن طاقة الحركة للمجموعة هي دالة تربيعية متجانسة في سرعات العموم وهذا يحدث عندما تكون  $\bar{r}_i$  لا تعتمد صراحة على الزمن. وبذلك ثبت المطلوب.

وإذا كانت  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_s} = 0$  أي دالة الجهد لا تعتمد على السرعات المعممة فإن:

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \quad (6)$$

إذا بتفاضل طريق المعادلة (٤) جزئياً بالنسبة إلى  $\dot{q}_s$  نجد أن:

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{k=1}^n a_{ks} \dot{q}_k \quad (7)$$

بضرب طريق (٧) في  $\dot{q}_s$  والجمع على جميع قيم  $s$  نجد أن:

$$\sum_{k=1}^n p_s \dot{q}_s = \sum_{k,s=1}^n a_{ks} \dot{q}_k \dot{q}_s \quad (8)$$

من (٤) في (٨) نجد أن:

$$\sum_{k=1}^n p_s \dot{q}_s = 2T \quad (9)$$

وحيث أن:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - L = \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - (T - V) = 2T - T + V \\ &= T + V = E \end{aligned}$$

أي أن الدالة  $H$  تساوي الطاقة الكلية للمجموعة التي فرضناها وهو المطلوب.  
ومن هذا المثال نجد أن  $H$  دالة هاملتون لنظام محافظ تمتلك ميزة مهمة وهي أنها تكافئ الطاقة الكلية للنظام.

#### ❖ ملاحظات:

(١) في الميكانيكا الكلاسيكية طاقة الحركة لجسيم يتحرك في خط مستقيم كتلته  $m$  وموضعه من نقطة الأصل  $x$  تعطى من العلاقة:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

وكمية حركته يمكن إيجادها بتفاضل المعادلة السابقة بالنسبة للسرعة  $\dot{x}$  فنجد أن:

$$\text{كمية الحركة} = p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

وهذا يشبه تماما ما يحدث في كمية الحركة المعممة.

(٢) في الحالة الخاصة عندما أحد الإحداثيات وليكن  $q_\lambda$  لم يظهر صراحة في اللاجرانجيان  $L$  إذن:

$$\dot{p}_\lambda = \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0 \Rightarrow p_\lambda = \text{const.} = c_\lambda$$

وفى هذه الحالة الإحداثي  $q_\lambda$  يسمى إحداثي مهمل أو مستتر أو دوري (Ignorable or cyclic coordinates) وكمية الحركة المصاحبة للإحداثي المعمم المهمل تكون ثابتة

من ثوابت النظام. ومثال على أحد الإحداثيات التي لم تظهر صراحة في دالة لاجرانج هو الزمن وفي هذه الحالة نجد أن:

$$\dot{p}_{(t)} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow p_{(t)} = H = \text{const.}$$

**مثال ٣:** أوجد معادلات هاملتون لحركة متذبذب توافقي أحادي البعد.

### الحل

باعتبار أن  $x$  هو الإحداثي المعمم الوحيد في هذا المثال وسبق أن أوجدنا للمتذبذب التوافقي الأحادي البعد الكميات التالية:

$$q_i = x, \quad \dot{q}_i = \dot{x}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2}kx^2$$

ومنها نجد أن:

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

دالة هاملتون تصبح:

$$H = T + V = \frac{1}{2}m\left(\frac{p^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2}kx^2 \quad (1)$$

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

معادلات هاميلتون (معادلات الحركة) تصبح:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$$

عندئذ تصبح:

$$\frac{p}{m} = \dot{x}, \quad kx = -\dot{p}$$

المعادلة الأولى عبارة عن نص آخر للعلاقة بين السرعة وكمية الحركة وفي هذه الحالة وعند استعمال المعادلة الأولى يمكن كتابة الثانية كما يلي:

$$kx = -\frac{d}{dt}(m\dot{x})$$

أو عند ترتيب الحدود نحصل على:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

وهذه هي معادلة المتذبذب التوافقي المعروفة.

#### مثال ٤

إذا كانت دالة لاجرانج معطاة بالعلاقة التالية:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1, q_2)$$

$$H = \frac{2}{3m}(p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2) + V(q_1, q_2) \quad \text{أثبت أن:}$$

$$m\ddot{q}_1 = \frac{2}{3}\frac{\partial V}{\partial q_2} - \frac{4}{3}\frac{\partial V}{\partial q_1} \quad \text{وأن معادلة الحركة هي:}$$

#### الحل

حيث أن دالة لاجرانج لا تعتمد على الزمن صراحة فإن:

$$H = T + V$$

$$\therefore H = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + V(q_1, q_2) \quad (1)$$

وكذلك نعلم أن كميات الحركة المعممة يمكن إيجادها كالتالي:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}m(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \quad (2)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2) \quad (3)$$

بحل المعادلتين (٢)، (٣) نحصل على:

$$\dot{q}_1 = \frac{2}{3m}(2p_1 - p_2)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{2}{3m}(2p_2 - p_1)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة الآن دالة هاملتون بدلالة كميات الحركة المعممة كالتالي:

$$H = \frac{1}{2}m \left( \frac{4}{gm^2}(2p_1 - p_2)^2 + \frac{4}{gm^2}(2p_1 - p_2)(2p_2 - p_1) + \frac{4}{gm^2}(2p_2 - p_1)^2 \right) + V(q_1, q_2) \quad (4)$$

$$H = \frac{2}{3m}(p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2) + V(q_1, q_2)$$

وهو المطلوب أولاً.

ولإيجاد معادلة الحركة نتبع التالي:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}m(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

إذن من معادلات لاگرانج نحصل على:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \right] + \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \quad (5)$$

$$m\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}m\ddot{q}_2 + \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0$$

بالمثل:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{1}{2} m(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2), & \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -\frac{\partial V}{\partial q_2} \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2) \right] + \frac{\partial V}{\partial q_2} &= 0 & (6) \\ \frac{1}{2} m\ddot{q}_1 + m\ddot{q}_2 + \frac{\partial V}{\partial q_2} &= 0\end{aligned}$$

بضرب المعادلة (٥) في العدد (- ٢) وجمعها على المعادلة (٦) نحصل على:

$$\begin{aligned}m\ddot{q}_1 \left( \frac{1}{2} - 2 \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial q_2} - 2 \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) &= 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} m\ddot{q}_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} - 2 \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \\ m\ddot{q}_1 &= \frac{2}{3} \frac{\partial V}{\partial q_2} - \frac{4}{3} \frac{\partial V}{\partial q_1}\end{aligned}$$

وهذه هي معادلة الحركة المطلوبة.

## ❖ ملاحظة

كيف يمكن الحصول على معادلة الحركة باستخدام معادلات هاملتون؟

يمكن الحصول على معادلات الحركة باستخدام معادلات هاملتون كالتالي:

معادلات هاملتون هي:

$$\begin{aligned}\dot{q}_s &= \frac{\partial H}{\partial p_s}, & \dot{p}_s &= -\frac{\partial H}{\partial q_s} \\ \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{2}{3m} (2p_1 - p_2) + \frac{\partial V}{\partial q_1} & (1)\end{aligned}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{2}{3m} (2p_2 - p_1) + \frac{\partial V}{\partial q_2} \quad (2)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1} \quad (3)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\partial V}{\partial q_2} \quad (4)$$

بتفاضل المعادلة (١) بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\ddot{q}_1 = \frac{2}{3m}(2\dot{p}_1 - \dot{p}_2) \quad (5)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{2}{3m}(2\dot{p}_2 - \dot{p}_1) \quad (6)$$

بالتعويض من (٣) و (٤) في (٥) نحصل على:

$$\ddot{q}_1 = \frac{2}{3m} \left( -2 \frac{\partial V}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_2} \right)$$

بالتعويض من (٣)، (٤) في (٦) نحصل على:

$$\ddot{q}_2 = \frac{2}{3m} \frac{\partial V}{\partial q_2} - \frac{4}{3m} \frac{\partial V}{\partial q_1}$$

وهو المطلوب.

#### مثال ٥:

منظومة ميكانيكية لها دالة لاجرانج التالية:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 \quad (1)$$

أوجد: أ) دالة هاملتون ب) معادلات هاملتون

ج) كميات الحركة المعممة والإحداثيات المعممة

#### الحل

في هذا المثال حيث أن طاقة الحركة دالة تربيعية متجانسة في سرعات العموم

وهي ما يمكن التعبير عنه بالمقدار:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)$$

وكذلك طاقة الجهد لا تعتمد اعتمادا صريحا على الزمن وعلى السرعات المعممة فإنه

يمكن كتابة دالة هاملتون مباشرة على النحو التالي:

$$H = T + V$$

$$H = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 \quad (2)$$

وحيث أن تعريف كمية الحركة المعممة يعطى من:

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$$

فإنه يمكن الحصول على كميتي الحركة المعممتين التاليتين:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \Rightarrow p_1 = \dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2 \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

بحل المعادلتين (٣) السابقتين نجد أن:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{2}{3}(2p_1 - p_2) \\ \dot{q}_2 &= \frac{2}{3}(2p_2 - p_1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

بالتعويض من (٤) في دالة هاملتون (٢) نحصل على دالة هاملتون معتمدة على السرعات المعممة  $q_s$  وكذلك على كميات الحركة المعممة  $p_s$  كالتالي:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left( \frac{4}{9}(4p_1^2 - 4p_1p_2 + p_2^2) + \frac{4}{9}(4p_2^2 - 4p_1p_2 + p_1^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{9}(4p_1p_2 - 2p_2^2 - 2p_1^2 + p_1p_2) + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 \right) \\ &\text{وبالاختصار تصبح:} \end{aligned}$$

$$H = \frac{2}{9}(3p_1^2 + 3p_2^2 - 3p_1p_2) + (q_1 - q_2)^2 \quad (5)$$

$$H = \frac{2}{3}(p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2$$

معادلات هاميلتون تصبح:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

ومنها نجد أن:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \Rightarrow \dot{q}_1 = \frac{4}{3}p_1 - \frac{2}{3}p_2 \\ \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} \Rightarrow \dot{q}_2 = \frac{4}{3}p_2 - \frac{2}{3}p_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} \Rightarrow \dot{p}_1 = -\frac{2}{2}(q_1 - q_2) \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} \Rightarrow \dot{p}_2 = +\frac{2}{2}(q_1 - q_2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

بتفاضل المعادلات (٦) بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{4}{3}\dot{p}_1 - \frac{2}{3}\dot{p}_2 \\ \ddot{q}_2 &= \frac{4}{3}\dot{p}_2 - \frac{2}{3}\dot{p}_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

بالتعويض من (٧) في (٨) نحصل على:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{4}{3}[-(q_1 - q_2)] - \frac{2}{3}[(q_1 - q_2)] = -\frac{4}{3}q_1 + \frac{4}{3}q_2 - \frac{2}{3}q_1 + \frac{2}{3}q_2 \\ \ddot{q}_1 &= 2q_2 - 2q_1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{4}{3}[(q_1 - q_2)] - \frac{2}{3}[-(q_1 - q_2)] = -\frac{4}{3}(q_1 - q_2) + \frac{2}{3}(q_1 - q_2) \quad \ddot{q}_2 = 2q_1 - 2q_2 \quad (10)$$

بجمع (٩)، (١٠) نحصل على:

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 0 \quad (11)$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = c_1 = \text{const.} \quad (12)$$

وبإجراء التكامل مرة أخرى نحصل على:

$$q_1 + q_2 = c_1 t + c_2 \quad (13)$$

بالتعويض من (١٣) في (٩) نحصل على معادلة تفاضلية في مجهول واحد فقط على الصورة:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= 2(c_1 t + c_2) - 4q_1 \\ \ddot{q}_1 + 4q_1 &= (2c_1 t + c_2) \end{aligned} \quad (14)$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية (١٤) يتكون من حل المعادلة المتجانسة وليكن  $q_1^{(1)}$  بالإضافة إلى أي حل خاص وليكن  $q_1^{(2)}$  على النحو التالي:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} \quad (15)$$

حيث أن حل المعادلة المتجانسة:

$$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 0$$

يعطى على الصورة:

$$q_1^{(1)} = c_3 \sin(2t + \varepsilon) \quad (16)$$

حيث  $\varepsilon, c_3$  ثوابت.

والحل الخاص  $q_1^{(2)}$  يعطى من:

$$\begin{aligned}
 q_1^{(2)} &= \frac{1}{D^2 + 4} (2c_1 + c_2) = \frac{2}{4 + \frac{1}{4}D^2} (c_1 t + \frac{1}{2}c_2) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{4}D^2)^{-1} (c_1 t + \frac{1}{2}c_2) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - \frac{D^2}{4} + (\frac{D^2}{4})^2 - \dots) (c_1 t + \frac{1}{2}c_2) \\
 &= \frac{1}{2} (c_1 t + \frac{1}{2}c_2)
 \end{aligned} \tag{17}$$

وعلى ذلك يصبح الحل العام على الصورة النهائية التالية:

$$q_1 = \frac{1}{2} (c_1 t + \frac{1}{2}c_2) + c_3 \sin(2t + \varepsilon) \tag{18}$$

وبالتعويض في (١٣) يمكن الحصول على  $q_2$  على الصورة:

$$q_2 = \frac{1}{2}c_1 t + \frac{3}{4}c_2 - c_3 \sin(2t + \varepsilon) \tag{19}$$

من ذلك نرى أن المعادلتين (١٨)، (١٩) تعطى الإحداثيات المعممة:

وبالتعويض من (١٨)، (١٩) في (٧) يمكن إيجاد كميات الحركة المعممة على الصورة التالية:

$$p_1 = \dot{q}_1 = \frac{1}{2}c_1 + 2c_2 \cos(2t + \varepsilon)$$

$$p_2 = \dot{q}_2 = \frac{1}{2}c_1 - 2c_3 \cos(2t + \varepsilon)$$

#### مثال ٦:

منظومة ميكانيكية طاقة حركتها هي:  $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$  وطاقة جهدها هي:  $V = (q_1 + q_2)^2$  أوجد دالة هاملتون، ومعادلات هاملتون، وحل معادلات هاملتون لتعين الإحداثيات المعممة  $q_s$  وكميات الحركة المعممة.

الحل

في هذا المثال حيث أن طاقة الحركة دالة تربيعية متجانسة في سرعات العموم وكذلك لا تعتمد طاقة الجهد اعتمادا صريحا على السرعات المعممة ٠٠ فإنه يمكن كتابة دالة هاملتون مباشرة كما يلي:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + (q_1 - q_2)^2 \quad (1)$$

وحيث ان تعريف كمية الحركة المعممة يعطى من:

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \quad (2)$$

فإنه يمكن الحصول على كميتي الحركة المعممتين التاليتين:

$$p_1 = \dot{q}_1, p_2 = \dot{q}_2 \quad (3)$$

بالتعويض من (٣) في (١) نحصل على دالة هاملتون بدلالة كميات الحركة المعممة والإحداثيات المعممة في الصورة:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (q_1 - q_2)^2 \quad (4)$$

باستخدام معادلات هاملتون التالية:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (5)$$

يمكن الحصول على:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{q}_1 = p_1 \\ \dot{q}_2 = p_2 \end{array} \right\} (6), \quad \left. \begin{array}{l} \dot{p}_1 = -2(q_1 - q_2) \\ \dot{p}_2 = 2(q_1 - q_2) \end{array} \right\} (6)'$$

بتفاضل المعادلات (6) والتعويض من (6)' نجد أن:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{q}_1 = \dot{p}_1 \Rightarrow \ddot{q}_1 = -2(q_1 - q_2) \\ \ddot{q}_2 = \dot{p}_2 \Rightarrow \ddot{q}_2 = 2(q_1 - q_2) \end{array} \right\} \quad (7)$$

بجمع المعادلتين (٧) نحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 0 \quad (8)$$

بإجراء التكامل نحصل على:

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = \text{const} = c_1 \quad (9)$$

بإجراء التكامل مرة أخرى نحصل على:

$$q_1 + q_2 = c_1 t + c_2 \quad (10)$$

باستخدام (١٠) في (٧) نحصل على معادلة تفاضلية في مجهول واحد فقط على الصورة التالية:

$$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 2(c_1 t + c_2) \quad (11)$$

الحل للمعادلة (١١) يتكون من حل المعادلة المتجانسة وليكن  $q_1^{(1)}$  بالإضافة إلى أي

حل خاص وليكن  $q_1^{(2)}$  على النحو التالي:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} \quad (12)$$

حيث أن المعادلة المتجانسة هي:

$$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 0 \Rightarrow q_1^{(1)} = c_3 \sin(2t + \varepsilon) \quad (13)$$

حيث  $\varepsilon, c_3$  مقدارين ثابتين. والحل الخاص  $q_1^{(2)}$  يعطى من:

$$\begin{aligned} q_1^{(2)} &= \frac{1}{D^2 + 4} (2c_1 t + c_2) = \frac{2}{41 + \frac{1}{4}D^2} (c_1 t + \frac{1}{2}c_2) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{4}D^2)^{-1} (c_1 t + \frac{1}{2}c_2) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \frac{D^2}{4} + (\frac{D^2}{4})^2 \dots) (c_1 t + \frac{1}{2}c_2) \\ &= \frac{1}{2} (c_1 t + \frac{1}{2}c_2) \end{aligned}$$

وعلى ذلك يصبح الحل العام على الصورة النهائية التالية:

$$q_1 = \frac{1}{2} (c_1 t + \frac{1}{2}c_2) + c_3 \sin(2t + \varepsilon) \quad (14)$$

وبالتعويض في (١٥) يمكن الحصول على  $q_2$  على الصورة التالية:

$$q_2 = \frac{1}{2}c_1t + \frac{3}{4}c_2 - c_3\sin(2t + \varepsilon) \quad (15)$$

من ذلك نرى أن المعادلتين (١٤)، (١٥) تعطيان الإحداثيين المعممين. بالتعويض من (١٤)، (١٥) في © (6) يمكن إيجاد كميتين الحركة المعممة على الصورة التالية:

$$p_1 = \dot{q}_1 = \frac{1}{2}c_1 + 2c_3\cos(2t + \varepsilon) \quad (16)$$

$$p_2 = \dot{q}_2 = \frac{1}{2}c_1 - 2c_3\cos(2t + \varepsilon) \quad (17)$$

**مثال ٧:**

إذا كانت دالة هاملتون لنظام ديناميكي هي:  $H = q_1p_1 - q_2p_2 - aq_1^2 + bq_2^2$  أثبت أن:

$$(i) \frac{p_2 - bq_2}{q_1} = \text{const.} \quad (ii) q_1q_2 = \text{const.}$$

$$(iii) \ln q_1 = t + \text{const}$$

**الحل**

معادلات هاملتون للحركة هي:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (1)$$

ومنها نجد أن:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}(q_1p_1 - q_2p_2 - aq_1^2 + bq_2^2)$$

$$\therefore \dot{q}_1 = q_1$$

$$\dot{q}_2 = -q_2 \quad (2) \quad \text{وبالمثل نجد أن:}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial}{\partial q_1}(q_1p_1 - q_2p_2 - aq_1^2 + bq_2^2)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1 &= -p_1 - 2aq_1, \\ \dot{p}_2 &= p_2 - 2bq_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

والآن ننظر للمطلوب الأول:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{p_2 - bq_2}{q_1} \right) &= \frac{q_1(\dot{p}_2 - b\dot{q}_2) - (p_2 - bq_2)\dot{q}_1}{q_1^2} \\ &= \frac{q_1[(p_2 - 2bq_2) + bq_2] - (p_2 - bq_2)q_1}{q_1^2} \\ &= \frac{q_1(p_2 - 2bq_2 + bq_2 - p_2 + bq_2)}{q_1^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{p_2 - bq_2}{q_1} = \text{const.} \quad \text{وبالتالي فإن:}$$

أما بالنسبة للمطلوبين الآخرين فنجد أن:

$$\text{(ii)} \quad \frac{d}{dt} (q_1 q_2) = \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_2 = q_1 \dot{q}_2 - q_1 \dot{q}_2 = 0$$

$$\therefore q_1 q_2 = \text{const.}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{d}{dt} (\ln q_1) = \frac{1}{q_1} \dot{q}_1 = \frac{1}{q_1} q_1 = 1$$

$$(\ln q_1) = t \Rightarrow \ln q_1 = t + \text{const.}$$

### مثال ٨:

إذا كان الفرق بين طاقتي الحركة والموضع لمنظومة ميكانيكية يعطي من العلاقة

$$\frac{\dot{x}^2}{2(A + By^2)} + \frac{1}{2} \dot{y}^2 - cy^2 \quad \text{التالية:}$$

حيث A, B, C ثوابت. أوجد معادلات هاملتون ومعادلات الحركة لهذه المنظومة.

### الحل

دالة لاجرانج معطاة من المثال كالتالي:

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2(A + By^2)} + \frac{1}{2} \dot{y}^2 - cy^2 \quad (1)$$

لإيجاد معادلات هاملتون نبدأ من تعريف كمية الحركة هي:

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \quad \text{ومنها نحصل على:} \quad (2)$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{2(A + By^2)} \Rightarrow \dot{x}^2 = p_1^2 (A + By^2)^2$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \Rightarrow \dot{y} = p_2$$

من تعريف دالة هاملتون نجد أن:

$$H = \sum p_s \dot{q}_s - L$$

$$= p_1 \dot{x} + p_2 \dot{y} - \frac{\dot{x}^2}{2(A + By^2)} - \frac{1}{2} \dot{y}^2 + cy^2$$

$$H = p_1^2 (A + By^2) + p_2^2 - \frac{p_1^2 (A + By^2)^2}{2(A + By^2)} - \frac{1}{2} p_2^2 + cy^2$$

$$H = \frac{1}{2} p_1^2 (A + By^2) + \frac{1}{2} p_2^2 + cy^2$$

من معادلات هاملتون للإيجاد السرعات وكميات الحركة المعممة نجد أن:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\left[ \frac{1}{2} p_1^2 (2By) + 2cy \right]$$

$$\dot{p}_2 = -y(Bp_1^2 + 2c) \Rightarrow \dot{p}_2 = -y \left[ B \frac{\dot{x}^2}{(A + By^2)^2} + 2c \right]$$

معادلة الحركة في اتجاه محور  $y$  تصبح:

$$\ddot{y} = -\frac{By\dot{x}^2}{(A + By^2)^2} - 2cy \quad (3)$$

$$p_1 = \frac{\dot{x}}{(A + By^2)} \Rightarrow \dot{p}_1 = \frac{(A + By^2)\ddot{x} - \dot{x}(2By\dot{y})}{(A + By^2)^2} = \frac{0}{1}$$

ومنها نجد أن معادلة الحركة في اتجاه محور  $x$  تصبح:

$$(A + By^2)\ddot{x} - 2By\dot{y}\dot{x} = 0 \quad (5)$$

أيضا يمكن الحصول على حل للمعادلتين التفاضليتين كالتالي:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{p}_2 = \frac{\partial H}{\partial y} = -(By^2 + 2cy)$$

$$\dot{p}_1 = 0 \Rightarrow p_1 = \lambda$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = (A + By^2)p_1$$

$$\dot{x} = \lambda(A + By^2) \quad \dot{y} = p_2 \Rightarrow \ddot{y} = \dot{p}_2 = -(By\lambda^2 + 2cy)$$

$$\therefore \ddot{y} = -(B\lambda^2 + 2c)y = -\omega^2 y$$

$$\therefore \omega^2 = (B\lambda^2 + 2c)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \Rightarrow y = D_1 \cos(\omega t + D_2)$$

$$\dot{x} = \lambda A + \lambda B(D_1 \cos(\omega t + D_2))^2$$

$$= \lambda A + \lambda B D_1^2 \cos^2(\omega t + D_2)$$

$$x(t) = \lambda A t + \lambda B D_1^2 \int \cos^2(\omega t + D_2) dt$$

$$= \lambda A t + \frac{1}{2} \lambda B D_1^2 \int [(\cos^2(\omega t + D_2)) + 1] dt$$

$$= \lambda A t + \frac{1}{2} \lambda B D_1^2 \left\{ \frac{\sin(2\omega t + D_2)}{2\omega} + t \right\} + D_3$$

$$= \lambda A t + \frac{1}{2} \lambda B D_1^2 t + \frac{1}{4\omega} \lambda B D_1^2 \sin(2\omega t + D_2) + \frac{1}{2} \lambda B D_1^2 D_3$$

### مثال ٩:

إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي:

$$L = (k + \frac{1}{2})\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \frac{n^2}{2}(k+1)q_1^2 - \frac{n^2}{2}q_2^2$$

فأوجد: أ- معادلات لاجرانج (هي معادلات الحركة)

ب- حل معادلات لاجرانج أي إيجاد  $q_1(t), q_2(t)$ . ج- دالة هاملتون.

د - معادلات هاميلتون. هـ - معادلات الحركة باستخدام معادلات هاميلتون ومقارنتها مع معادلات الحركة التي أوجدت من معادلات لاجرانج.

### الحل

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= 2(k + \frac{1}{2})\dot{q}_1 + \dot{q}_2, & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}) &= 2(k + \frac{1}{2})\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2, & \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}) &= \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial q_1} &= -n^2(k+1)q_1, & \frac{\partial L}{\partial q_1} &= -n^2q_2\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}) = \frac{\partial L}{\partial q_1} \quad \diamond \diamond \text{ معادلات لاجرانج الأولى:}$$

$$2(k + \frac{1}{2})\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = -n^2(k+1)q_1 \quad (2)$$

### معادلات لاجرانج الثانية:

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = -n^2q_2 \quad (3)$$

بجمع المعادلتين (٢)، (٣) نجد أن:

$$2[(k+1)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] + n^2[(k+1)q_1 + q_2] = 0 \quad (4)$$

$$(k+1)q_1 + q_2 = y \Rightarrow (k+1)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = \ddot{y} \quad \text{بوضع:}$$

$$2\ddot{y} + n^2y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{n^2}{2}y \quad \text{ومنها نجد أن:}$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة حلها معروف ويمكن وضعه على الصورة:

$$\begin{aligned}y &= C_1 \cos(\omega t + C_2), \quad \omega^2 = \frac{n^2}{2} \\ (k+1)q_1 + q_2 &= C_1 \cos(\omega t + C_2) \quad (5)\end{aligned}$$

بضرب المعادلة (٣) في (k+1) نجد أن:

$$(k+1)\ddot{q}_1 + (k+1)\ddot{q}_2 = -n^2(k+1)q_2 \quad (6)$$

ب طرح (٦) من (٢) نجد أن:

$$k(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) + n^2(k+1)(q_1 + q_2) = 0 \quad (7)$$

$$q_1 - q_2 = x \quad \text{بوضع:}$$

$$\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 = \ddot{x} \quad \text{ومنها نجد أن:}$$

$$\ddot{x} = -\frac{n^2(k+1)}{k}x \quad (8)$$

$$\omega_2^2 = \frac{n^2(k+1)}{k} \quad \text{هذه أيضا معادلة حركة توافقية بسيطة فيها:}$$

$$x = C_3 \cos(\omega_2 t + C_4)$$

$$q_1 - q_2 = C_3 \cos(\omega_2 t + C_4) \quad (9)$$

بجمع المعادلتين (٩)، (٥) نجد أن:

$$q_1 + (k+1)q_1 = C_1(\cos \omega_1 t + C_2) + C_3(\cos \omega_2 t + C_4)$$

$$q_1 = \frac{1}{(k+2)} \{C_1 \cos(\omega_1 t + C_2) + C_3 \cos(\omega_2 t + C_4)\}$$

وبالمثل يمكن إيجاد  $q_2$

دالة هاملتون يمكن وضعها على الصورة التالية (وذلك لان فيها طاقة الحركة دالة تربيعية متجانسة في السرعات المعممة ، وطاقة الموضع دالة فقط في الإحداثيات المعممة):

$$H = (k + \frac{1}{2})\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + \frac{n^2}{2}(k+1)q_1^2 + \frac{n^2}{2}q_2^2 \quad (10)$$

من تعريف كمية الحركة المعممة نجد أن:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_1}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_2}$$

ومنها نحصل على:

$$p_1 = 2(k + \frac{1}{2})\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \quad (11)$$

$$\dot{p}_1 = 2(k + \frac{1}{2})\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \quad (12)$$

$$\dot{p}_2 = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \quad (13)$$

من معادلات هاملتون:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial L}{\partial q_1} = -n^2(k+1)q_1 \quad (14)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial L}{\partial q_2} = -n^2q_2 \quad (15)$$

واضح من (١٤)، (١٢) نجد أن:

$$2(k+1)\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = -n^2(k+1)q_1 \quad (16)$$

من (١٥)، (١٣) نجد أن:

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = -n^2q_2 \quad (17)$$

### مثال ١٠: (آلة أتود المزدوجة):

كتلة  $m_1$  معلقة عند أحد طرفي خيط خفيف طوله  $\ell_1$  يمر على بكرة خفيفة مثبتة  
ملساء وعند الطرف الآخر للخيط توجد بكرة خفيفة أيضا ومثبتة وملساء يمر عليها  
خيط خفيف طوله  $\ell_2$  ويحمل كتلتين  $m_2, m_3$ .  
أوجد: أ- دالة هاملتون ومعادلات هاملتون ب- معادلات الحركة للبكرتين.

### الحل

سبق أن تم حل هذا المثال باستخدام دالة لاگرانج والآن سوف نقوم بتطبيق دالة  
هاملتون للحصول على نفس النتائج.

توجد درجتان حرية للمنظومة  $q_1, q_2$  هما الإحداثيان المعممان. أيضا البكرتان  
خفيفتا الوزن وكذلك الخيوط  $\ell_1, \ell_2$  نوجد أولا: طاقة الحركة للمجموعة كالتالي:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(-\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$$

أي أن:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)$$

إذا طاقة الحركة تصبح في الصورة التالية:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \dot{q}_1^2 + (m_3 - m_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{q}_2^2$$

نوجد الآن طاقة الجهد:

$$V = -m_1 g q_1 - m_2 g [q_2 + \ell_1 - q_1] - m_3 g [(\ell_1 - q_1) + (\ell_2 - q_2)]$$

والتي يمكن اختصارها على النحو التالي:

$$V = (m_2 + m_3 - m_1) g q_1 + (m_3 - m_2) g q_2 - (m_2 \ell_1 + m_3 \ell_1 + m_3 \ell_2) g$$

على ذلك تصبح دالة لاجرانج على الصورة التالية:

$$L = T - V \quad (2)$$

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \dot{q}_1^2 + (m_3 - m_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{q}_2^2 - (m_2 + m_3 - m_1) g q_1 - (m_3 - m_2) g q_2 + [m_2 \ell_1 + m_3 (\ell_1 + \ell_2)] g \quad (3)$$

وسبق في الفصل الثاني إيجاد معادلات الحركة من دالة لاجرانج  $L$  وكانت المعادلة الأولى المصاحبة للإحداثي  $q_1$  كالتالي:

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{q}_1 + (m_3 - m_2) \ddot{q}_2 = -(m_2 + m_3 - m_1) g \quad (4)$$

وكذلك كانت معادلة لاجرانج الثانية المصاحبة للإحداثي  $q_2$  تصبح كالتالي:

$$\therefore (m_3 - m_2) \ddot{q}_1 + (m_2 + m_3) \ddot{q}_2 = -(m_3 - m_2) g \quad (5)$$

المعادلتان (٤)، (٥) هما معادلتا الحركة في هذه الحالة.

## إيجاد دالة هاملتون:

$$H = T + V$$

$$H = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1^2 + (m_3 - m_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{q}_2^2 \\ + (m_2 + m_3 - m_1)gq_1 + (m_2 - m_3)gq_2 \\ - (m_2\ell_1 + m_3\ell_1 + m_3\ell_2)g \quad (6)$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_1} \\ p_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1 + (m_3 - m_2)\dot{q}_2 \quad (7)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_2} \\ p_2 = (m_3 - m_2)\dot{q}_1 + (m_2 + m_3)\dot{q}_2 \quad (8)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \dot{p}_1 = (m_2 + m_3 - m_1)g \quad (9)$$

بتفاضل (٧) نجد أن:

$$\dot{p}_1 = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_2 \quad (10)$$

من (٩)، (١٠) نجد أن:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_2 = -(m_2 + m_3 - m_1)g \quad (11)$$

وهي نفس معادلة لاگرانج الأولى رقم (٤).

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \dot{p}_2 = -(m_2 - m_3)g \quad (12)$$

بتفاضل (٨) بالنسبة للزمن نجد أن:

$$\dot{p}_2 = (m_3 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 \quad (13)$$

ومن (١٢)، (١٣) نجد أن:

$$(m_3 - m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 = -(m_2 - m_3)g \quad (14)$$

وهذه نفس معادلة لاجرانج الثانية (٥).

**أخيرا إيجاد القوى المعممة:**

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1} = -(m_2 + m_3 - m_1)g$$

$$Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2} = -(m_3 - m_2)g$$

**مثال ١١:**

إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي:

$$L = \frac{1}{2}k(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + g \cos \theta$$

فأوجد: دالة هاملتون - معادلات هاملتون ثم أثبت أن:

$$\dot{\theta}^2 + \frac{c^2}{\sin^2 \theta} - \frac{2g}{k} \cos \theta = \text{const.}$$

**الحل**

معطى لنا في هذا المثال دالة لاجرانج على الصورة التالية:

$$L = \frac{1}{2}k(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + g \cos \theta \quad (1)$$

كمية الحركة المعممة تعرف كالتالي:  $p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$  ومنها نجد أن:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow p_1 = k\dot{\theta} \quad , \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \Rightarrow p_2 = k\dot{\phi} \sin^2 \theta \quad (2)$$

ومنها يمكن الحصول على السرعات المعممة بدلالة كميات الحركة المعممة كالتالي:

$$\dot{\theta} = \frac{p_1}{k} \quad , \quad \dot{\phi} = \frac{p_2}{(k \sin^2 \theta)} \quad (3)$$

دالة هاملتون تعرف كالتالي:  $H = \sum p_s \dot{q}_s - L$  ومنها نجد أن:

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L \quad (4)$$

ويحذف السرعات المعممة منها والاختصار نحصل على:

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{k} + \frac{1}{2} \frac{p_2^2}{(k \sin^2 \theta)} - g \cos \theta \quad (5)$$

معادلات هاملتون تصبح:

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \Rightarrow \dot{p}_1 = g \sin \theta + \frac{1}{k} \frac{p_2^2 \tan \theta}{\sin^2 \theta} \quad (6)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad (7)$$

من المعادلتين (٢) و (٦) نحصل على:

$$k\ddot{\theta} = g \sin \theta + \frac{k}{k} \dot{\phi}^2 \sin^4 \theta \frac{\tan \theta}{\sin^2 \theta}$$

التي يمكن أن تختصر إلى الصورة التالية:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{k} \sin \theta + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \tan \theta \quad (8)$$

من المعادلتين (٣) و (٧) نحصل على:

$$k(\ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}) = 0$$

#### مثال ١٢:

إذا كانت دالة لاجرانج لنظام ميكانيكي معطى بالعلاقة (k ثابت):

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} k^2 q_1^2$$

أثبت أن:  $q_1^2 = A \sin(2kt + B) + C$  حيث A, B, C ثوابت.

### الحل

لايجاد معادلات لاجرانج نوجد:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = q_1 \dot{q}_2^2 - k^2 q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_1} \quad \text{إذا معادلة لاجرانج الأولى تصبح:}$$

$$\ddot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2^2 + k^2 q_1 = 0 \quad (1)$$

وبالمثل:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1^2 \dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = q_1^2 \ddot{q}_2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_2} \quad \therefore \text{معادلة لاجرانج الثانية تصبح:}$$

$$\frac{d}{dt} (q_1^2 \dot{q}_2) = 0 \quad (2)$$

ومن المعادلة (٢) نجد أن:

$$q_1^2 \dot{q}_2 = \lambda^2 \Rightarrow \dot{q}_2 = \frac{\lambda^2}{q_1^2} \quad (3)$$

من (٣) في (١) نحصل على:

$$\ddot{q}_1 - \lambda^2 q_1^{-3} + k^2 q_1 = 0 \quad (4)$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة (٤) في  $2\dot{q}_1$  نجد أن:

$$2\dot{q}_1 \ddot{q}_1 - 2\lambda^2 q_1^{-3} \dot{q}_1 + 2k^2 q_1 \dot{q}_1 = 0 \quad (5)$$

والمعادلة (٥) السابقة يمكن وضعها على الصورة:

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_1^2) + \frac{d}{dt}(\lambda^2 q_1^{-2}) + \frac{d}{dt}(k^2 q_1^2) = 0$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن:

$$\dot{q}_1^2 + \lambda^2 q_1^{-2} + k^2 q_1^2 = C_1 \quad (6)$$

بضرب طرفي المعادلة (٦) في  $q_1^2$  نجد أن:

$$q_1^2 \dot{q}_1^2 + \lambda^2 + k^2 q_1^4 = C_1 q_1^2$$

$$q_1 \dot{q}_1 = \sqrt{C_1 q_1^2 - k^2 q_1^4 - \lambda^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} q_1^2\right) = k \sqrt{\frac{C_1}{k^2} q_1^2 - q_1^4 - \frac{\lambda^2}{k^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} x\right) = k \sqrt{\frac{C_1}{k^2} x - x^2 - \frac{\lambda^2}{k^2}} \quad \text{بوضع } q_1^2 = x \text{ نجد أن:}$$

وبوضعها على صورة إكمال مربع وفصل المتغيرات والتكامل نجد أن:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - (x - c)^2}} = 2k \int dt$$

$$C = \frac{c_1}{2k^2}, \quad A^2 = \frac{c_1^2}{4k^4} - \frac{\lambda^2}{k^2} \quad \text{حيث:}$$

$$\sin^{-1} \frac{(x - c)}{A} = (2kt + B)$$

$$\frac{x - c}{A} = \sin(2kt + B) \Rightarrow x = A \sin(2kt + B) + C$$

$$\therefore q_1^2 = A \sin(2kt + B) + C$$

**ملاحظة:**

المعادلة (٤) يمكن وضعها على صورة معادلة غير متجانسة وحل المعادلة المتجانسة هو حل معادلة حركة توافقية بسيطة.

**مثال ١٣:**

جسيم كتلته  $m$  يتحرك في مجال قوة جهدها  $V$  أكتب في الإحداثيات الكروية  $(r, \theta, \phi)$  أوجد: أ- دالة هاملتون. ب- معادلات هاملتون.

**الحل**

(أ) طاقة الحركة في الإحداثيات الكروية هي:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (1)$$

عندئذ تكون دالة لاگرانج هي:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r, \theta, \phi) \quad (2)$$

ومن تعريف كمية الحركة المعممة يكون:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, & p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{aligned} \quad (3)$$

ومنها نجد أن:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{(mr^2)}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{(mr^2 \sin^2 \theta)} \quad (4)$$

$$H = \sum_{s=1}^n p_s \dot{q}_s - L$$

دالة هاملتون تصبح:

$$\therefore H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + V(r, \theta, \phi)$$

وعلى ذلك تصبح دالة هاملتون كدالة في كميات الحركة المعممة على الصورة التالية:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r, \theta, \phi) \quad (5)$$

إيجاد معادلات هاملتون يتم كالتالي:

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta}$$

#### مثال ١٤:

تتحرك نقطة مادية في المستوى x y تحت تأثير قوة جذب مركزية تعتمد فقط على بعد النقطة عن نقطة الأصل. والمطلوب :

(أ) إيجاد دالة هاملتون (ب) معادلات هاملتون. (ج) إثبات أن  $H = E$

#### الحل

باستخدام الإحداثيات القطبية  $(r, \theta)$  وبفرض أن دالة الموضع هي  $V(r)$  فإن

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

$$V = - \int \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

حيث

$$L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) \text{ دالة لاجرانج دالة في } (r, \dot{r}, \dot{\theta})$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$$

$$H = H(r, p_r, p_\theta) = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - \left[ \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r) \right]$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) \quad \text{دالة هاملتون ستكون:}$$

(ب) معادلات هاملتون هي :

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} - V'(r)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p_\theta = mr^2 \dot{\theta} = \text{const} = h$$

(ج) إثبات أن  $H = E$  بما أن

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \Rightarrow T = \frac{m}{2} \left( \frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2}{m^2 r^2} \right) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2}$$

$$E = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V = H$$

مثال ١٥:

أوجد باستخدام معادلات هاملتون معادلات حركة جسيم يتذبذب حركة توافقية بسيطة.

الحل

حيث أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة فإن :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} k x^2, \quad k = \text{const.}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{إذن دالة لاگرانج هي:}$$

دالة هاملتون يجب كتابة  $\dot{x}$  بدلالة  $p_x$

$$\therefore p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{p_x^2}{2m}$$

$$H = H(x, p_x) = T + V = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

ومن ثم: ومن معادلات هاملتون يكون

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad \text{أو} \quad p_x = m \dot{x}$$

$$-\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial x} = k x \quad \text{أو} \quad \dot{p}_x = -k x$$

من  $p_x$ ،  $\dot{p}_x$  يكون:  $m \ddot{x} = -k x$  وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة.

### مثال ١٦:

معطى لك دالة لاجرانج لنقطة مادية تتحرك في الصورة

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega^2 x^2 = \alpha x^2 + \beta x \dot{x}$$

حيث  $\alpha, \beta, \omega$  ثوابت أوجد دالة هاملتون.

### الحل

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} (1 + \beta x) \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{1 + 2\beta x}$$

$$H = p \dot{x} - L = \frac{p^2}{1 + 2\beta x} - \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{1 + 2\beta x} \right) (1 + 2\beta x) + \alpha x^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2}$$

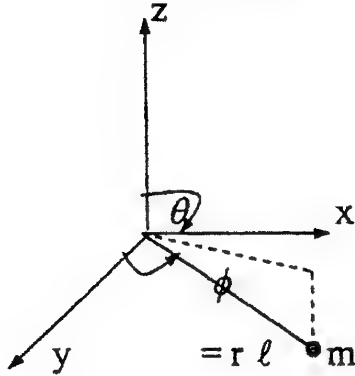
$$H = \alpha x^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{p^2}{1 + 2\beta x}$$

وهذه دالة في  $x, p$

مثال ١٧ : أوجد معادلات هاميلتون في حالة البندول الكروي.

### الحل

شكل (٣-١)



البندول الكروي عبارة عن خيط طوله  $l$  مثبت طرفه وطرفه الآخر به كتلة  $m$ . يمكن أن تتحرك هذه الكتلة على سطح كرة مركزها الطرف الثابت ونصف قطرها  $l$ . الإحداثيات المعممة هي  $\theta, \phi$  حيث  $\theta$  هي الزاوية بين الخيط والرأس لأعلى خلال الطرف الثابت للخيط والذي هو المحور  $z, \phi$  هي الزاوية بين مستقيم أفقي ثابت يمر خلال الطرف الثابت (محور  $x$ ) ومسقط الخيط على مستو أفقي مار بالمحور  $x$ .

$$T = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta}^2 + \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad \text{طاقة الحركة } T$$

$$V = -m g \ell (\pi - \theta) = m g \ell \cos \theta \quad \text{طاقة الوضع :}$$

$$L = T - V$$

إذا دالة لاجرانج ستكون:

$$L = \frac{m \ell^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - m g \ell \cos \theta$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \ell^2 \dot{\theta}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{p_1}{m \ell^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_2}{m \ell^2 \sin^2 \theta}$$

$$H = T + V = H(q_\alpha, p_\alpha)$$

دالة هاميلتون ستكون:

$$= \frac{p_1^2}{2m\ell^2} + \frac{p_2^2}{2m\ell^2 \sin^2 \theta} + m g \ell \cos \theta$$

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_2 \cos \theta}{m\ell^2 \sin^3 \theta} + m g \ell \sin \theta \quad \text{معادلات هاميلتون تكون:}$$

$$\dot{p}_2 = 0$$

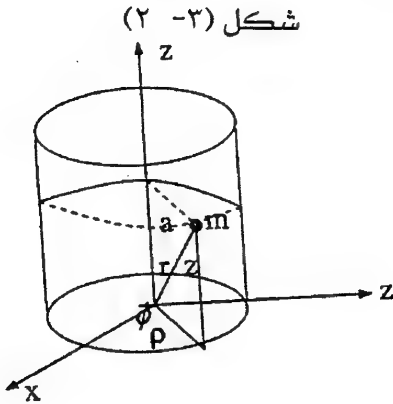
$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m\ell^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m\ell^2 \sin^2 \theta}$$

مما سبق يتضح أن  $\phi$  هو إحداثي مهمل أي أن ثابت  $p_2$  وهي التي تمثل ثبوت كمية الحركة الزاوية حول المحور  $z$ .

### مثال ١٨ :

جسيم كتلته  $m$  يتحرك على السطح المنحني لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها  $a$  تحت تأثير قوة جذب نحو نقطة الأصل تتناسب مع بعد الجسيم عند نقطة الأصل.

### الحل



يمكن استخدام الإحداثيات

الأسطوانية  $(\rho, \phi, z)$  أو الكارتيزية

$(x, y, z)$  لاحظ أن

$$|\vec{r}| = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1)$$

$$\vec{F} = -k \vec{r} \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{معادلة القيد}$$

$$\therefore \rho = a, \quad \dot{\rho} = 0$$

فإن طاقة الحركة تعطى من:

$$T = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m (a^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad (3)$$

طاقة الجهد (من المعادلة (١)):

$$V = \frac{1}{2} k r^2 = k (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$V = \frac{1}{2} k (a^2 + z^2) \quad (4)$$

دالة لاجرانج :

$$L = T - V = L(z, \dot{\phi} + \dot{z})$$

$$L = \frac{1}{2} m (a^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - k (a^2 + z^2) \quad (5)$$

من المعادلة (٥) نوجد  $\dot{\phi}$  بدلالة  $p_\phi$  ،  $\dot{z}$  بدلالة  $p_z$  ويكون كالآتي :

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m a^2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m a^2} \quad (6)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m} \quad (7)$$

بالتعويض في المعادلة (٣) نحصل على

$$T = \frac{1}{2} m \left[ a^2 \left( \frac{p_\phi}{m a^2} \right)^2 + \left( \frac{p_z}{m} \right)^2 \right] \Rightarrow T = \frac{1}{2 m} \left[ \frac{p_\phi^2}{a^2} + p_z^2 \right]$$

$$H = T + V$$

دالة هاميلتون تعطى من:

$$H = H(z, \phi, p_\phi, p_z)$$

$$H = \frac{p_\phi^2}{2 m a^2} + \frac{p_z^2}{2 m} + \frac{1}{2} k (a^2 + z^2) \quad (8)$$

إذن معادلات هاميلتون ستكون:

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} = -\dot{p}_{\alpha} ,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} = \dot{q}_{\alpha}$$

والإحداثيات المعممة  $z, \phi, p_z, p_{\phi}$  نجد أن :

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \Rightarrow p_z = m \dot{z} \quad (9)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\phi}} = \frac{p_{\phi}}{m a^2} \Rightarrow p_{\phi} = m a^2 \dot{\phi} \quad (10)$$

$$-\dot{p}_z = \frac{\partial H}{\partial z} = k z \Rightarrow \dot{p}_z = -k z \quad (11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_{\phi} = \text{const.} \quad (12)$$

من المعادلة (٩)، (١١) نجد أن :

$$m \ddot{z} = -k z$$

∴ حركة الجسيم في اتجاه محور  $z$  هي حركة توافقية بسيطة.

من المعادلة (١٠)، (١٢) نحصل على

$$p_{\phi} = \text{const.} = m a^2 \dot{\phi}$$

أي أن العزم الزاوي حول محور  $z$  يساوي ثابت وهو واضح حيث محور  $z$  هو محور تماثل وأن  $II$  لا تحتوي على الإحداثي المعمم  $\phi$ .

#### مثال ١٩:

جسيم كتلته  $m$  يتحرك في مجال قوة دالة الجهد  $V$ . أوجد دالة هاملتون ومعادلات هاملتون في الإحداثيات القطبية الكروية  $(r, \theta, \phi)$  للجسيم.

#### الحل

طاقة الحركة في الإحداثيات الكروية تعطى من :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

ستكون دالة لاجرانج

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r, \theta, \phi)$$

من دالة لاجرانج نوجد السرعات المعممة بدلالة كميات الحركة المعممة كما يلي :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m r^2 \sin^2 \theta}$$

$$H = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L \quad \text{وبالتالي دالة هاملتون هي :}$$

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + V(r, \theta, \phi)$$

ثم بالتعويض عن  $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  بدلالة  $p_r, p_\theta, p_\phi$  نحصل على

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m r^2} + \frac{p_\phi^2}{2m r^2 \sin^2 \theta} + V(r, \theta, \phi)$$

يلاحظ أن الدالة  $H$  كان يمكن إيجادها مباشرة من تساويها بالطاقة الكلية حيث أن النظام هنا من الأنظمة المحافظة :

$$H = T + V$$

أي إن

معادلات هاملتون :

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \quad \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \Rightarrow \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \Rightarrow p_r = m \dot{r}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\phi}} = \frac{p_{\phi}}{m r^2 \sin^2 \theta} \Rightarrow p_{\phi} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{p_\phi^2}{m r^2 \sin^2 \theta} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{m r^2 \sin^2 \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

يلاحظ أن  $V$  لا تعتمد على الإحداثي المعمم  $\phi$  ومن ثم كذلك الدالة  $H$  وفي هذه الحالة يكون  $\dot{p}_\phi = 0$  ومنها  $p_\phi = \text{const.}$  ويكون العزم الدوراني  $p_\phi$  هو ثابت الحركة.

### تمارين

١- جسيم كتلته  $m$  يتحرك في مجال قوة جهد  $V$ .  
(أ) أكتب دالة هاملتون. (ب) معادلات هاملتون في الإحداثيات المتعامدة  $(x, y, z)$

٢- استخدم معادلات هاملتون لدراسة حركة جسيم كتلته  $m$  على مستوي مائل أملس زاويته  $\alpha$ .

٣- باستخدام معادلات هاملتون حل مسألة المذبذب التوافقي في:  
(أ) بعد واحد (ب) بعدين (ج) ثلاثة أبعاد

(٤) إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي:

$$L = (k + \frac{1}{2})\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \frac{n^2}{2}(k+1)q_1^2 - \frac{n^2}{2}q_2^2$$

أ- اكتب معادلات لاجرانج للحركة ب- أثبت أن:  $q_1 - q_2 = A \cos(N + B)$

حيث  $A, B, N, k, n$  كميات ثابتة. وأن:  $N^2 k = (k+1)n^2$

ج- أوجد حل معادلات الحركة المستتجة أي أوجد:  $q_1(t), q_2(t)$ .

# الفصل الرابع

## مبدأ هاملتون

Hamilton's principle

\* مقدمة

\* مبدأ هاملتون للتأثير الأقل (أو الفعل الأقل)

\* قاعدة (مبدأ) هاملتون

\* استنتاج معادلات لاگرانج من مبدأ هاملتون

\* أمثلة وتمارين

## الفصل الرابع

## مبدأ هاملتون

Hamilton's principle

## مقدمة:

عندما تم استنتاج معادلات لاجرانج استخدمنا تعريف طاقة الحركة المستنتجة من قوانين نيوتن للحركة وفي هذا الجزء سوف نتعرض لطريقة أخرى لاستنتاج معادلات لاجرانج. هذه الطريقة تستند على فرضية أثبتت شموليتها بنتائجها. وتظهر في فرع الرياضيات المعروف بحساب التغير أو التباين .

## ١-٤ مبدأ هاملتون للتأثير الأقل (أو الفعل الأقل) حساب التغير (التباين) Calculus of Variation

من المسائل الشهيرة والأكثر شيوعاً في الرياضيات في حساب التغيرات هي مسألة إيجاد المنحنى  $y(x)$  الذي يصل بين النقطتين  $x = a$  ،  $x = b$  بحيث يكون التكامل

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx = \text{Extremum} \quad (1)$$

أي يكون  $I$  نهاية عظمى أو صغرى (Extremum) حيث  $y' = \frac{dy}{dx}$  والدالة  $F$  هي دالة في  $x$  بصرف النظر عن تركيبها بالشكل السابق والتي تعتمد على الموضع على المنحنى  $y(x)$  وميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة  $y'(x)$  وأن للدالة  $F$  قيم عددية مختلفة للتكامل  $I$  باختلاف المنحنى  $y(x)$  والمطلوب البحث عن منحنى معين  $y(x)$  يجعل قيمة التكامل  $I$  قيمة قصوى (نهاية عظمى أو صغرى) وإن أمكن الحصول على ذلك المنحنى فإنه يسمى المنحنى الأقصى Extremal. وكما سنرى أن الشرط الضروري لذلك هو أن تتحقق معادلة أويلر

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

ولإثبات ذلك نفرض أن منحني  $y$  أزيح إلى نقطة أخرى أي حدث له تغير بمقدار صغير فإن :

$$\therefore I = \int F dx \quad (3)$$

$$\therefore \delta I = \int \delta F dx$$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \quad \text{ولكن}$$

بالتعويض في  $\delta I$  واستخدام التكامل بالتجزئ نحصل على

$$0 = \delta I = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \delta y \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} \right] dx \quad (4)$$

وعند  $x = b, x = a$  يكون الزيادة الحادثة في  $y$  تساوي صفر (أي أن  $\delta y = 0$ )

عند كل من  $(a, b)$ ، فإن الحد الأول ينعدم وينتج

$$0 = \delta I = \int \delta y \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} \right] dx \quad (5)$$

وحيث أن  $\delta y$  اختيارية فإن

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة للفراغ متعدد الأبعاد حيث

$$I = \int_a^b F(x_1, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$$

ويكون الشرط الضروري لكي يكون التكامل نهاية عظمى أو صغرى هو تحقق

معادلة أويلر في الصورة

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

ما هو الشرط الضروري لكي يكون التكامل

$$I = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx \quad (8)$$

نهاية قصوى (عظمى أو صغرى)؟

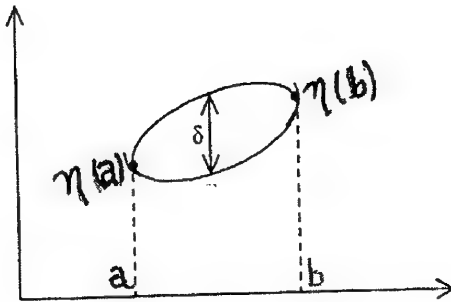
نتبع نفس الأسلوب السابق في إيجاد  $\delta I$  وحساب  $\delta F$  حيث  $F = F(x, y, y', y'')$  داخل التكامل فيكون الشرط هو:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0 \quad (9)$$

وعموماً إذا كانت  $F(x, y, y', \dots, y^n)$  فإن الشرط هو :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\partial F}{\partial y^n} \right) = 0 \quad (10)$$

شكل (٤ - ١)



إذا كان مطلوب المنحنى الذي يجعل التكامل  $I$  له نهاية عظمى وبحيث

$$\int_a^b G(x, y, y') dx$$

يساوي مقدار ثابت. هذا التكامل

الأخير يمثل قيد وهو أن التكامل

يساوي ثابت وهذا الشرط مثل القيود

أو الحالات المقيدة في معادلات

لاجرانج غير أن ذلك باعتبار

التكامل المتكون مع إضافة

التكامل

إلى  $\lambda \int_a^b G(x, y, y') dx$  حيث  $\lambda$  معامل لاجرانج فيصبح التكامل الناتج هو

$$\int_a^b (F + \lambda G) dx = \int_a^b \xi dx \quad (11)$$

وهذا التكامل يكون له نهاية قصوى إذا تحقق

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y'} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

حيث  $\xi = \lambda G + F$

طريق أخرى لتعيين معادلة المنحنى  $y=y(x)$  الذي يصل بين نقطتين  $a, b$  بحيث أن التكامل  $I = \int_a^b F(x, y, y') dx$  نهاية قصوى (عظمى أو صغرى) ، ولايثبات أن الشرط الضروري لكي يكون التكامل نهاية قصوى هو أن (معادلة أويلر)

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

تكون محققه . ولايثبات ذلك نفرض أن  $\eta(x)$  متغير كما بالرسم وبفرض حدوث إزاحة  $\varepsilon \eta$  فى اتجاه  $y$  فيكون المنحنى الذي يجعل للتكامل نهاية هو

$$y = Y(x) \text{ في الفترة } a \leq x \leq b$$

والمنحنى المجاور له والمار بالنقطتين  $a, b$  هو

$$y = Y + \varepsilon \eta$$

حيث  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  و  $\varepsilon$  ثابت لا يعتمد على  $x$  أي

$$y' = Y' + \varepsilon \eta'$$

ومن ثم يكون

$$I = I(\varepsilon) = \int_a^b F(x, Y + \varepsilon\eta, Y' + \varepsilon\eta') dx$$

نطبق شرط وجود النهاية وهو  $\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$  ومن ثم بالتفاضل نحصل على

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \left( 0 + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon} \right) dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx$$

بالتكامل بالتجزئ للحد الثاني من التكامل وتطبيق الشروط  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  فتحصل على

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right) dx = 0$$

وحيث أن  $\eta$  اختياري فيكون

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

وهو الشرط الضروري لكي يكون التكامل  $I$  له نهاية قصوى.

تعيين معادلة أويلر والشروط والكافية

$$\therefore I = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

$$I + \delta I = \int_a^b F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') dx$$

باستخدام مفكوك ماكلاورين

$$\begin{aligned} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') &= F(x, y, y') + \varepsilon \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \eta^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\eta\eta' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \eta'^2 \right) + o(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

بالتعويض في من المفكوك في التكامل نحصل على

$$\delta I = \varepsilon I_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} I_2 + o(\varepsilon^3)$$

ولكي يكون  $I$  قيمة عظمى الشرط الكافي لذلك  $I_1 = 0$  ،  $I_2 < 0$  ولكي

يكون قيمة صغرى هو  $I_1 = 0$  ،  $I_2 > 0$

والشرط  $I_1 = 0$  يعطى

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right) dx = 0$$

ومنها ينتج معادلة أويلر

#### ٢-٤ قاعدة (مبدأ) هاملتون Hamilton's Principle

من دراستنا للميكانيكا رأينا أنها تعتمد على قوانين نيوتن وكذلك في اشتقاق معادلات لاجرانج لحركة منظومة ديناميكية استخدمنا قانون نيوتن الثاني . سنرى هنا انه توجد طريقة أخرى لاشتقاق معادلات لاجرانج (التشابه الواضح بين المعادلة (٢) ومعادلات لاجرانج يساعد على دراسة مسألة منحنيات النهاية العظمى أو النهاية الصغرى للتكامل التالي). والتي تعتمد على قاعدة هاملتون للتغايير Hamilton's Variational Principle والتي تنص على أن حركة أي منظومة من عدة جسيمات أو حتى جسيم واحد تحدث بشرط أن التكامل

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_n, t) dt$$

يكون نهاية عظمى أو صغرى حيث  $L = T - V$  دالة لاجرانج للنظام الديناميكي . وكما بينا سابقا أن التغير الذي يحدث هو أن التكامل السابق يكون نهاية عظمى أو صغرى إذا كان:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

حيث  $\delta$  ترمز للتغير الصغير وهذا التغير ينتج من اخذ مسارات مختلفة للتكامل بتغير الإحداثيات والسرعات المعممة كدوال في الزمن  $t$ .

#### ٣-٤ استنتاج معادلات لاگرانج من مبدأ هاملتون :

مبدأ هاملتون كما ذكرنا سابقاً ينص على أن أي مجموعة ديناميكية هولونومية ذات الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  حيث  $\alpha = 1, \dots, n$  إذا علمت الشروط الابتدائية للحركة فإن  $q_\alpha$  تكون دوال وحيدة في الزمن  $q_\alpha = q_\alpha(t)$  وفي أثناء تحرك المجموعة في الفراغ ترسم مساراً فيه والذي يحقق قانون نيوتن الثاني ومعادلات لاگرانج. والمعادلات  $q_\alpha$  يمكن اعتبارها معادلات بارامترية وتمثل معادلات المسار ، هذا ويجدر بنا أن نقارن هذا المسار الحقيقي بمساراً آخر مجاور لا يحقق قانون نيوتن الثاني ولا معادلات لاگرانج ولكن له نفس نهايتي المسار الحقيقي بمعنى أن المسارين قد يتقاطعا في نفس الزمن  $(t_2 - t_1)$  مثلاً وذلك حتى يمكن استنتاج شرطاً رياضياً للمسار الحقيقي.

وينص مبدأ هاملتون للفعل الأقل على أن تكامل الحركة (Action Integral) الآتي

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad \text{or} \quad \delta \int_0^t L dt = 0 \quad (13)$$

يكون نهاية عظمى أو صغرى (في معظم الأحوال نهاية صغرى) وذلك لأي مسار حقيقي ممثّل للحركة إذا ما قورن بمسار آخر مجاور بحيث  $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$  دالة لاگرانج. أي سنفرض أن دالة لاگرانج دالة في الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  والسرعات المعممة  $\dot{q}_\alpha$ .

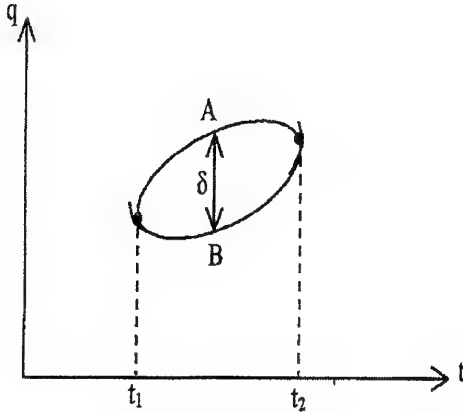
مما سبق الشرط اللازم لكي يكون للتكامل السابق نهاية قصوى وهو تحقق

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (14)$$

والمعادلة (14) هي بالضبط معادلة لاگرانج.

❖ ملاحظة

شكل (٤ - ٢)



وبين مبدأ هاملتون أنه إذا أجرى التكامل الخطى على دالة لاجرانج وعلى جميع المسارات التي تصل بين النقطتين  $t_1, t_2$  فإن أحد هذه المسارات (وهو واحد فقط) ينتج قيمة صغرى ويكون هذا المسار هو المسار الحقيقي للمنظومة.

وحتى يمكننا دراسة نتائج هذا المبدأ فإنه يجب مقارنة قيم تكامل الفعل على جميع المسارات القريبة من المسار الحقيقي والمارة بنفس نقطتي البداية  $t_1$  والنهاية  $t_2$  وهذا يدخلنا فيما يسمى حساب التغيرات Calculus of variations

مثال ١:

أثبت أنه لكي يكون للتكامل التالي:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1)$$

قيمة قصوى لابد أن يحقق الشرط التالي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2)$$

الحل

بتطبيق مبدأ التغيرات على المعادلة (١) على فرض أن  $L$  هي دالة معروفة بدلالة الإحداثيات المعممة  $q_k$  والسرعات المعممة  $\dot{q}_k$  وسوف نثبت هذا المثال في حالة إحداثي معمم واحد ويمكن بسهولة تعميم النتيجة بعد ذلك، إذا:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \delta q \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

وبملاحظة أن:

والآن  $\delta q$  تساوى الفرق بين دالتين للزمن  $t$  ومختلفين قليلا إذن:

$$\delta \frac{d}{dt} q = \frac{d}{dt} \delta q$$

فإنه يمكن كتابة التكامل (٣) على الصورة:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \delta q \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] dt$$

وبمكاملة الحد الثاني في الطرف الأيمن نجد أن:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

ولأن جميع المسارات تبدأ وتنتهي عند نفس النقطتين أي نقطتي بداية ونهاية المسار تبقى

ثابتة إذن الحد الأول من الطرف الأيمن يتلاشى ، وكذلك لأن:  $\delta q \Big|_{t_1} = \delta q \Big|_{t_2} = 0$

حيث أنه لا يوجد عند  $t_2, t_1$  أي تغيير في الدالة  $q$  والمعادلة السابقة تصبح:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

والآن حيث جميع المتغيرات  $\delta q$  مستقلة فإن شرط تحقيق هذه المعادلة يصبح كالتالي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

وهذه هي معادلة لاجرانج وهي تمثل الشرط المطلوب:

### ❖ ملاحظات:

(١) تم استنتاج معادلة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية لها إحداثي معمم واحد وفي الحقيقة فإنه يمكن أيضا استنتاج معادلات لاجرانج باستخدام نفس المبدأ السابق "مبدأ هاملتون" إذا كان للمنظومة الميكانيكية أكثر من إحداثي معمم واحد.

(٢) في حالة وجود أكثر من إحداثي معمم واحد فإنه التغير لأي دالة مثلا  $F(q, \dot{q}, t)$  يمكن كتابته كالتالي:

$$\delta F(q, \dot{q}, t) = F(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - F(q, \dot{q}, t)$$

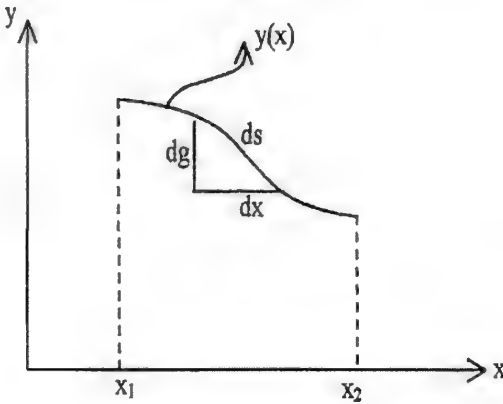
ويمكن بعد ذلك استخدام مفكوك تايلور للحصول على تعميم النتيجة السابقة.

### مثال ٢:

أثبت أن أقصر مسافة بين نقطتين في مستوى هي الخط المستقيم الواصل بينهما

### الحل

شكل (٤ - ٣)



لنفرض أن الخط الذي يصل بين هاتين النقطتين هو المنحنى  $s$  المعطى بـ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} ds$$

وبما أن عنصر الطول من قوس يعطى بالعلاقة:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$ds = +\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{1 + y'^2}) dx$$

$$F = \sqrt{1 + y'^2}$$

بفرض أن:

وبما أن الشرط الضروري لكي يكون s نهاية صغرى هو:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2} (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} 2y'$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} = c_1$$

بضرب الطرفين في الوسطين ثم التربيع نجد أن:

$$y'^2 = c_1^2 (1 + y'^2) \Rightarrow y'^2 = c_1^2 + c_1^2 y'^2$$

$$y'^2 - c_1^2 y'^2 = c_1^2 \Rightarrow y'^2 (1 - c_1^2) = c_1^2$$

والتي يمكن وضعها على الصورة التالية:

$$y'^2 = \frac{c_1^2}{1 - c_1^2} = a^2$$

ثم بأخذ الجذر التربيعي للطرفين والتكامل نجد أن:

$$y' = \pm a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm a \Rightarrow dy = \pm a dx \Rightarrow y = \pm ax + b$$

وهذه معادلة خط مستقيم. وبالتالي نجد أن أقصر مسافة بين نقطتين في مستوى هو الخط المستقيم الواصل بينهما.

### مثال ٣:

جسيم ينزلق من السكون عند نقطة ما على سلك أملس في مستوى رأسي إلى نقطة أخرى تحت تأثير الجاذبية. أوجد الزمن الذي يستغرقه في ذلك. ثم أثبت أنه إذا كان المطلوب هو أن يتحرك الجسيم بين النقطتين في أقل زمن ممكن فإن المعادلة التفاضلية للمنحنى  $c$  الذي يصل بين هاتين النقطتين هي:

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0$$

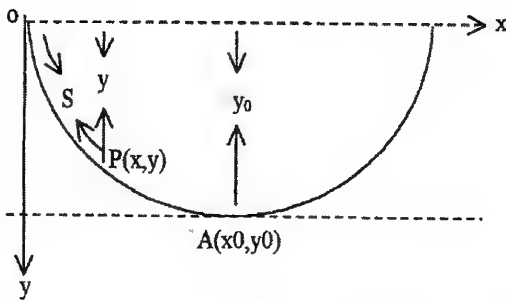
وأن المعادلات البارامترية لهذا المنحنى هي:

$$x = a(\phi - \sin \phi), \quad y = a(1 - \cos \phi)$$

حيث  $\phi$  هو البارامتر،  $a$  ثابت.

### الحل

شكل (٤ - ٤)



نفرض شكل السلك كما هو موضح بالشكل ونفرض أن المحور  $x$  هو المحور الأفقي وأن محور  $y$  هو المحور الرأسي إلى أسفل. ونفرض أن نقطة الابتداء

والانتهاء مأخوذتان عند نقطة الأصل والنقطة  $A(x_0, y_0)$  على الترتيب.

نفرض أن الجسيم عند أي لحظة زمنية  $t$  عند النقطة  $p$  التي إحداثياتها  $x, y$ . وبفرض أن كتلة الجسيم هي  $m$ . وبفرض أن الخط الأفقي المار خلال  $A$  هو مستوى قياس الطاقة فيكون من مبدأ ثبوت الطاقة أن:



وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} & -(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}} y'^2 y^{-\frac{1}{2}} y'' + (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} y'' y^{-\frac{1}{2}} \\ & - \frac{1}{2} (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} y'^2 y^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} = 0 \\ & (1+y'^2)^{-\frac{3}{2}} y^{-\frac{3}{2}} [-y'^2 y'' y + (1+y'^2) y'' y \\ & - \frac{1}{2} (1+y'^2) y'^2 + \frac{1}{2} (1+y'^2)^2] = 0 \end{aligned}$$

وبعد الاختصار تصبح:

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0 \quad (\diamond)$$

وهو المطلوب.

ولحل هذه المعادلة التفاضلية نضع:

$$y' = u, \quad y'' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$$

إذا المعادلة التفاضلية ( $\diamond$ ) تصبح:

$$1 + u^2 + 2yu \frac{du}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{2u}{1+u^2} du = 0$$

$$\ell \ln + \ell \ln(1+u^2) = \ell \ln \Rightarrow (1+u^2)y = b$$

$$u^2 y = b - y \Rightarrow u^2 = \frac{b-y}{y} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{b-y}{y}}$$

$$y' = u = \sqrt{\frac{b-y}{y}} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{(b-y)}{y}}} \Rightarrow x = \int \sqrt{\frac{y}{b-y}} dy$$

$$\text{Let } y = b \sin^2 \theta, \quad dy = 2b \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$x = 2b \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2b \int \sin^2 \theta d\theta$$

$$= 2b \left( \frac{1}{2} \right) \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} b (2\theta - \sin 2\theta) + c$$

إذا المعادلات البارامترية المطلوبة هي:

$$x = \frac{1}{2}b(2\theta - \sin 2\theta) + c, \quad y = b\sin^2 \theta = \left(\frac{1}{2}b\right)(1 - \cos 2\theta)$$

وحيث أن  $x = 0$  عند  $y = 0$  إذن  $c = 0$ .

وبوضع  $a = \frac{1}{2}b, \phi = 2\theta$  نحصل على:

$$x = a(\phi - \sin \phi), \quad y = a(1 - \cos \phi)$$

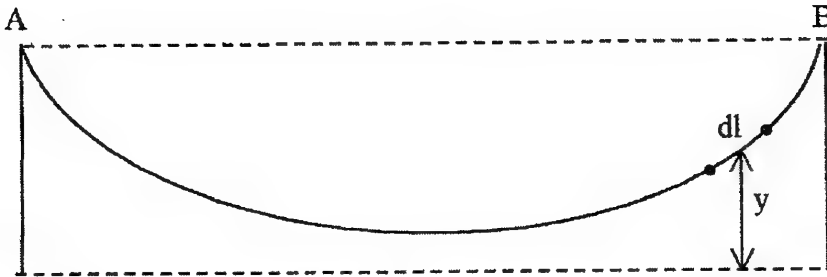
وهو المطلوب.

#### مثال ٤:

قضيب ثقيل منتظم مثبت عند طرفيه في خط أفقي واحد أوجد شكل المنحنى الذي يأخذه القضيب تحت تأثير قوة الجاذبية الأرضية.

#### الحل

شكل (٤ - ٥)



من الواضح أن جميع أجزاء القضيب في حالة سكون وبذلك لا توجد طاقة حركة وتكون الطاقة الكلية E هي طاقة موضع فقط ومن الواضح كذلك فإن هذه الطاقة الكلية يجب أن تكون أقل ما يمكن لهذا السبب (أنها طاقة موضع فقط). نعتبر خط قياس الطاقة هو الخط الموضح بالرسم.

$$E = \int_A^B mgy dl, \quad dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

بعد القسمة على الثابت  $mg$

$$\delta E = 0 = \delta \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

وبذلك فيجب أن تحقق معادلة لاجرانج للدالة التالية:

$$F = y \sqrt{1 + y'^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{1 + y'^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= \frac{y'^2 + yy''}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{yy' + y'y''}{(\sqrt{1 + y'^2})^3} \\ &= \frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} [(y'^2 + yy'')(1 + y'^2) - yy'^2 y''] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} [y'^2 + yy'' + y'^4] = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$y'^2 + yy'' + y'^4 = (1 + y'^2)^2 = 1 + 2y'^2 + y'^4$$

$$y'' = 1 + y'^2 \Rightarrow \frac{2y'y''}{1 + y'^2} = 2y' \frac{1}{y}$$

$$\ell n(1 + y'^2) = 2\ell n y - \ell n b^2 = \ell n \frac{y^2}{b^2}$$

$$1 + y'^2 = \frac{y^2}{b^2}, \quad y' = \pm \sqrt{\frac{y^2}{b^2} - 1} \quad (*)$$

باستخدام التعويض التالي:  $y = b \cosh \theta, \quad dy = b \sinh \theta d\theta$

المعادلة (❖) تعطى:

$$b \sinh \theta \frac{d\theta}{dx} = \pm \sinh \theta$$

$$b d\theta = \pm dx \Rightarrow b\theta = \pm(x+a) \quad \therefore y = b \cosh\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

وهذه المعادلة هي الحل المطلوب ويكون شكل المنحنى كما هو معروف الذي يسمى بمنحنى الكتيبة (السلسلة) العادية.

#### مثال ٤:

في الحركة التوافقية البسيطة استخدم مبدأ هاملتون الأقل لإيجاد معادلات الحركة.

#### الحل

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad \delta T = m \dot{x} \delta \dot{x}, \quad \delta W = -k x \delta x$$

$$\therefore \int_0^{\tau} (\delta T + \delta W) dt = 0 = \int_0^{\tau} m \dot{x} d(\delta x) - \int_0^{\tau} k x \delta x dt$$

$$m \dot{x} \delta x \Big|_0^{\tau} - \int_0^{\tau} m \ddot{x} \delta x dt - \int_0^{\tau} k x \delta x dt = 0$$

الحد الأول يتلاشى عند  $0, \tau$ . وحيث أن  $\delta x$  إزاحة اختيارية فإننا نصل إلى معادلة نيوتن الثاني

$$- \int_0^{\tau} (m \ddot{x} + k x) \delta x dt = 0 \Rightarrow m \ddot{x} = -k x$$

#### مثال ٥:

جسيم يتحرك في مستوى رأسي تحت تأثير وزنه أوجد معادلات نيوتن الثاني باستخدام مبدأ هاملتون للتأثير الأقل.

الحل

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \delta T = m \dot{x} \frac{d}{dt} (\delta x) + m \dot{y} \frac{d}{dt} \delta y$$

$$\delta W = -m g \delta y$$

$$\int_0^r (\delta T + \delta W) = 0 = [m \dot{x} \delta x + m \dot{y} \delta y]_0^r - \int_0^r m \ddot{x} \delta x dt$$

$$\int_0^r m \ddot{y} \delta y dt - \int_0^r m g \delta y dt = 0$$

وحيث أن  $\delta x, \delta y$  اختياريين ومستقلين فنحصل على المعادلات الممثلة للحركة لنيوتن  
 $m \ddot{x} = 0, m \ddot{y} = -m g$

**مثال ٦:**

ادرس منحنيات التوقف Extremels للتكامل الآتي :  $I = \int_a^b x^2 y'^2 dx$   
 ومن ثم أوجد الحل الذي يصل بين النقطتين  $a(1,1), b(2,1/2)$ .

الحل

$$F(x, y, y') = x^2 y'^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2 x^2 y'$$

ومنها

ومن ثم معادلة أويلر ستصبح

$$\frac{d}{dx} (2 x^2 y') = 0 \Rightarrow x^2 y' = \text{const.} = A$$

$$y' = \frac{A}{x^2} \quad \text{أي}$$

بالتكامل نحصل على منحنيات التوقف في الصورة:  $y = -\frac{A}{x} + B$

حيث  $A$ ،  $B$  ثابتان اختياريان والمنحنيات تمثل قطاعات زائدة قائمة ومنحنى التوقف الذي يربط بين النقطتين  $a$ ،  $b$  نوجده بالتعويض في معادلة منحنيات التوقف فنحصل على

$$-A + B = 1, \quad -\frac{A}{2} + B = \frac{1}{2}$$

ومنها  $A = -1$ ،  $B = 0$  ويصبح معادلة منحنى التوقف المطلوب هي  $xy = 1$

واضح أن نقطتي النهاية  $a$ ،  $b$  تقعان على المنحنى. ناقش ما إذا كانت النقطتان  $a(1,1)$ ،  $b(-2,-1/2)$  يصلان المنحنى وهما نقطتان توقف.

#### مثال ٧:

إذا كان البعد بين نقطتين على سطح اسطوانة يعطى من:

$$I = \int_a^b \left[ 1 + \rho^2 \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz$$

حيث إحداثيات النقطة هي  $(\rho, \phi, z)$  و  $\rho$  مقدار ثابت. أوجد معادلة الخط الواصل بين النقطتين حتى يكون الخط أقصر بعد بينهما (ما هي العلاقة بين  $(\phi, z)$  التي تجعل  $I$  نهاية صغرى).

#### الحل

العلاقة بين  $(\phi, z)$  التي تجعل  $I$  نهاية صغرى نوجده من معادلة أويلر.

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial F}{\partial \phi'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0$$

$$F = \left[ 1 + \rho^2 \phi'^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \phi' = \frac{d\phi}{dz}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \phi'} = \rho^2 \phi' (1 + \rho^2 \phi'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

بالتعويض في معادلة أولر نحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial \phi'} = \rho^2 \frac{d\phi}{dz} \left( 1 + \rho^2 \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \text{const.}$$

بوضع  $\phi' = \frac{d\phi}{dz}$  وبفصل المتغيرات والتكامل مرة أخرى نحصل على :

$$\rho \phi = A z + B$$

حيث A, B ثوابت.

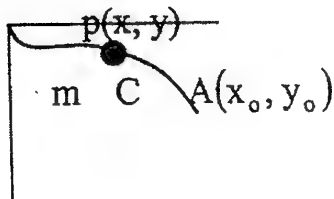
يتضح من العلاقة السابقة أن أقصر بعد بين a , b يمثل خط حلزوني ويلاحظ أنه بفرض عند a كان  $\phi = 0, z = 0$  فإن  $B=0$  وبفرض عند b كان  $z = z_1$  ،  $\phi = \phi_1$  وبالتالي  $A = \frac{\rho \phi_1}{z_1}$  ويصبح :  $\rho \phi = (\rho \phi_1 / z_1) z$  هي المعادلة النهائية.

#### مثال ٨:

تتزلق نقطة مادية تحت تأثير الجاذبية على سلك أملس واقع في مستوى رأسي بدأت النقطة الحركة من السكون من إحدى نقط السلك فأوجد زمن الوصول إلى نقطة أخرى معينة على السلك.

#### الحل

شكل (٤ - ٦)



نفرض أن مسار النقطة هو المنحنى C وأن  $A(x_0, y_0)$  هي نقطة البداية،  $p(x, y)$  هي موضع النقطة عند أي لحظة من مبدأ ثبوت الطاقة نجد أن :

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = m g y \quad \text{or} \quad \frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{2 g y}$$

حيث  $s$  طول القوس وحيث أن  $\frac{ds}{dt}$  تتزايد بتزايد  $y$  فإن  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$  ومنه ينتج أن :  $t = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$

والزمن المطلوب هو  $\tau = \int_0^{y_0} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$

حيث أن  $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$

الدالة  $F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$  هنا  $x$  غائبة وقيمة التكامل تعبر عن كمية طبيعية وهي الزمن.

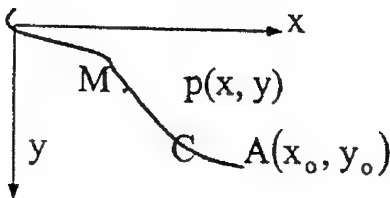
#### مثال ٩:

تتزلق نقطة مادية تحت تأثير الجاذبية على سلك أملس واقع في مستو رأسي فإذا بدأت النقطة حركتها من السكون من إحدى نقط السلك. فإذا كان على النقطة المادية أن تقطع المسافة بين نقطة البداية إلى نقطة النهاية في أقل زمن ممكن فاثبت أن المعادلة التفاضلية للمنحنى  $C$  هي :  $1 + y'^2 + 2y y'' = 0$

#### الحل

شكل (٤ - ٧)

بما أن معادلة أولير للمنحنى الأفقي هي :



$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$F = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

حيث من مثال (٨)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}}, \quad \therefore \frac{\partial F}{\partial y'} = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} y' y^{-\frac{1}{2}},$$

بالتعويض في معادلة أويلر والاختصار نحصل على

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + y'^2 + 2 y y'' = 0$$

مثال ١٠:

أوجد المنحنى  $C$  والذي طوله  $\ell$  والذي يحيط بأكبر مساحة ممكنة.

الحل

نعلم أن المساحة المحددة بالمنحنى  $C$  تعطى من :

$$A = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_C (x y' - y) dx \quad (1)$$

طول المنحنى يعطى من

$$S = \int_C \sqrt{1+y'^2} dx = \ell \quad (2)$$

باستخدام معاملات لاگرانج : نعتبر أن

$$F = A + \lambda S$$

$$\therefore \tau = \int_C \left[ \frac{1}{2} (x y' - y) + \lambda \sqrt{1+y'^2} \right] dx \quad (3)$$

من معادلة أويلر لحساب التغير

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$F = \frac{1}{2} (x y' - y) + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \quad \text{حيث}$$

نجد أن

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left( -\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = -1 \quad (4)$$

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -x + C_1 \quad \text{بتكامل (4) نحصل على:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}} \quad \text{ومنها نوجد } y'$$

بالتكامل

$$y - C_2 = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}$$

or

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2 \quad (5)$$

وهذه معادلة دائرة نصف قطرها  $\lambda = \frac{\ell}{2\pi}$  وهو المنحنى المطلوب.

مثال ١١:

اثبت أن معادلة أويلر:  $\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$  يمكن كتابتها على الصورة

وإذا كانت  $F$  لا تعتمد على  $x$  صراحة فاثبت  $\frac{d}{dx}[F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.} \quad \text{أن :}$$

الحل

أولاً : إذا كانت  $F = F(x, y, y')$

$$\therefore \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \quad (1)$$

كذلك

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \quad (2)$$

بطرح (1)، (2)

$$\frac{d}{dx} \left[ F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{ولكن المقدار}$$

حيث أن  $F$  تحقق معادلة أويلر وبالتالي نحصل على :

$$\frac{d}{dx} \left[ F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

ثانياً : إذا كانت  $F$  لا تعتمد على  $x$  فإن  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  ومن (3) نحصل على

$$\frac{d}{dx} \left[ F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] = 0$$

وبالتكامل بالنسبة إلى  $x$  نحصل على

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

## مثال ١٢:

أوجد معادلات حركة البندول البسيط بتطبيق مبدأ هاملتون لخيط مرن.

الحل

دالة لاگرانج للبندول

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m g r \cos \theta - \frac{1}{2} k (r - r_0)^2$$

حيث  $r_0$  هو الطول الأصلي للخيط،  $k$  ثابت المرونة (الشدة).

بتطبيق قاعدة هاملتون والتي تنص على أن

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \left\{ m (\dot{r} \delta \dot{r} + r \dot{\theta}^2 \delta r + r^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta}) + m g \delta r \cos \theta - m g r \delta \theta \sin \theta - k (r - r_0) \delta r \right\} dt$$

ولكن

$$\begin{aligned} m \dot{r} \delta \dot{r} dt &= m \dot{r} d(\delta r) \\ &= d(m \dot{r} \delta r) - m \delta r \ddot{r} dt \end{aligned}$$

بالمثل

$$\begin{aligned} m r^2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dt &= d(m r^2 \dot{\theta} \delta \theta) - \delta \theta \frac{d(m r^2 \dot{\theta})}{dt} dt \\ &= d(m r^2 \dot{\theta} \delta \theta) - \delta \theta (m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta}) dt \end{aligned}$$

من ثم يصبح التكامل السابق

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \left\{ m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta + k (r - r_0) \right\} \delta r dt + \\ &\left\{ m r^2 \ddot{\theta} + 2 r \dot{r} \dot{\theta} + m g r \sin \theta \right\} \delta \theta dt \end{aligned}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} [d(m\dot{r}\delta r) + d(mr^2\dot{\theta}\delta\theta)] dt = 0$$

ونفرض أن  $\delta r, \delta\theta$  تتلاشى عند  $t_1, t_2$  فإن التكامل الأخير يتلاشى وكذلك التكامل الأول حيث أن  $\delta r, \delta\theta$  مستقلان فإن معاملاتهما يتلاشيان كل على حدة أي أن:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(r - r_0) = 0 ,$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta = 0$$

وهذه هي معادلات الحركة للبندول والتي من الممكن الحصول عليها بتطبيق معادلات لاگرانج. كذلك إذا كانت  $k = 0$  فإننا نحصل على معادلة البندول البسيط العادي (الخيط غير مرن).

### تمارين

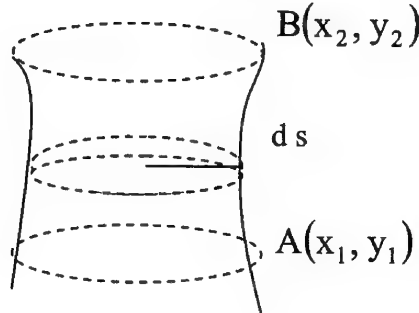
(١) جسيم ينزلق من السكون من إحدى نهايتي سلك أملس مثبت في مستوى رأسي تحت تأثير مجال الجاذبية فإذا كان الزمن الكلي الذي يستغرقه الجسيم حتى يصل للنهاية الأخرى للسلك يعطى من :  $\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$  أثبت أنه إذا كان هذا الزمن هو أقل زمن ممكن أن يستغرقه الجسيم فإن المنحنى C الذي يمثل شكل السلك يعطى من المعادلة التفاضلية:  $1 + y'^2 + 2y y'' = 0$

ثم أوجد حل المعادلة التفاضلية وأثبت أن المنحنى C هو منحنى سيكلويد.

إرشادات : من المثال السابق  $F = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$

واستخدم الشرط الضروري لكي يكون الزمن نهاية صغرى وهو تحقق معادلة أويلر للمنحنى الأقصى . ثم نوجد حل المعادلة التفاضلية الناتجة باستخدام التعويض  $y' = u(y)$  أي تخفيض الرتبة ثم استخدم فصل المتغيرات.

(٢) نقطتين ثابتتين  $A(x_1, y_1)$ ،  $B(x_2, y_2)$  يصل بينهما منحنى كما هو مبين بالشكل. فإذا دار هذا المنحنى حول محور y فأوجد معادلة هذا المنحنى لكي يكون مساحة السطح الناشئ عن الدوران أقل ما يمكن.



إرشادات : تقسيم السطح إلى شرائح كل منها  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$   
 $= \sqrt{1 + y'^2} dx$

ومساحة سطح الشريحة الدورانية:  $2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx$

من ثم والمساحة الدورانية الكلية ستكون:  $2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + y'^2} dx$

ومن ثم  $F = x \sqrt{1 + y'^2}$

ولإيجاد القيمة الصغرى لهذه المساحة استخدام معادلة أويلر والحل

وهي تمثل معادلة منحنى الكتيبة. حيث  $a, \beta$  ثوابت تتعين

من معادلة المنحنى عند النقطتين  $A, B$

# الفصل الخامس

معادلات راوث Routh's Equations

- \* الإحداثيات الدورية أو المهملة
- \* طرق دراسة المسائل الديناميكية المحتوية على
- الإحداثيات المهملة
- \* دالت ومعادلات راوث
- \* أمثلة

الباب الخامس

معادلات راوٲ Routh's Equations

#### ١-٤ الإحداثيات الدورية أو المهملة:

المنظومة الديناميكية التي لها  $n$  درجة حرية إذا فرض أن عدد من إحداثياتها المعممة والتي عددها  $n - m$  لا تظهر صراحة في دالة لاجرانج  $L$  (وأيضاً دالة هاملتون  $H$ ) تسمى بالإحداثيات المهملة أو الغائبة أو الدورية ويظهر مكانه أو بدلاً منه السرعة المعممة المرافقة له صراحة في  $L$  وتظهر في  $H$  كميات الحركة المعممة المرافقة للإحداثيات المهملة المعممة كمثال المقذوف العادي الإحداثي  $x$  غائباً و  $L$  يتضمن  $\dot{x}$  أي:

$$L = L(\dot{x}, \dot{y}, y)$$

عموماً إذا رمزنا للإحداثيات غير المهملة  $q_\alpha$  حيث  $\alpha = 1, 2, \dots, m$  والإحداثيات الغائبة  $s_i$  حيث  $i = m+1, \dots, n$  في هذه الحالة تكون  $L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \dot{s}_i)$  (مع ملاحظة إن غياب  $s_i$  لا يستلزم غياب  $\dot{s}_i$ ) فان :

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial s_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{const.}$$

أي أن كمية الحركة المرافقة للإحداثي المهمل تظل ثابتة إنشاء الحركة . كذلك من معادلات هاملتون يكون للإحداثي المهمل

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial s_i} = 0 \Rightarrow H = H(q_\alpha)$$

نستنتج أن الإحداثي المهمل  $s_i$  لا يظهر صراحة في دالة لاجرانج  $L$  فانه لا يظهر صراحة في دالة هاملتون  $H$ .

#### ٢-٤ طرق دراسة المسائل الديناميكية المحتوية على الإحداثيات المهملة

هناك طريقتان لدراسة المسائل الديناميكية المحتوية على الإحداثيات المهملة.

الأولى : تطبيق معادلات لاجرانج مباشرة.

الثانية : إدخال دالة راووث ومعادلات راووث.

الطريقة الأولى: إذا فرضنا دالة لاجرانج  $L$  لا تعتمد صراحة على الزمن  $t$  أي تكن

دالة في الإحداثيات المهملة والتي عددها  $n-m$  وهي  $s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n$  والباقي

إحداثيات معمة غير مهمة عددها  $q_\alpha$  حيث  $\alpha = 1, \dots, m$

أي دالة لاجرانج

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, s_i) \quad (1)$$

حيث  $\alpha = 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n$

ومعادلات لاجرانج تصبح

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = m+1, m+2, \dots, n \quad (3)$$

من المعادلة (2) بالتكامل نحصل على :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} = \text{const.} = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

والمعادلة (4) تمثل معادلات خطية عددها  $m$  في  $\dot{s}_i$  التي يمكن حلها لإيجاد  $\dot{s}_i$  بدلالة

المتغيرات  $\beta_i, q_\alpha, \dot{q}_\alpha$  أي

$$\dot{s}_i = \dot{s}_i(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \beta_1, \dots, \beta_m) \quad (5)$$

ثم بالتعويض من (5) في المعادلة (3) نحصل على  $n-m$  من المعادلات التفاضلية في

$q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \beta_i$  التي يمكن تكاملها للحصول على  $q_\alpha$  كدالة في الزمن  $t$  أي  $q_\alpha(t)$

بعد استخدام الشروط الابتدائية. ثم بتكامل المعادلة (5) بعد التعويض عن  $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$

كدوال في  $t$  فنحصل على الإحداثيات المعمة المهمة كدوال في  $t$  بعد استخدام

الشروط الابتدائية

$$s_i = \int \dot{s}_i dt + c_i = s_i(t) \quad (6)$$

ومن ثم نحصل على الحل الكامل للمسألة الديناميكية.

### الطريقة الثانية : دالة ومعادلات راوٲ

هذه الطريقة تعتمد على الدالة  $R$  والتي تعتبر تعديل لدالة لاجرانج لتلائم الإحداثيات المعممة المهمة ويتم ذلك بحساب التعبير التفاضلي لدالة لاجرانج  $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \dot{s}_i)$  فنحصل على

$$dL = \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} d\dot{s}_i \quad (7)$$

ومن المعادلة (4) نجد أن

$$dL = \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \sum_{i=1}^m \beta_i d\dot{s}_i$$

$$dL = \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + d \sum_{i=1}^m \beta_i d\dot{s}_i - \sum_{i=1}^m \dot{s}_i d\beta_i \quad (8)$$

والتي يمكن كتابتها

$$d \left( L - \sum_{i=1}^m \beta_i \dot{s}_i \right) = \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \sum_{i=1}^m \dot{s}_i d\beta_i = dR$$

حيث

$$R = L - \sum_{i=1}^m \beta_i \dot{s}_i \quad (9)$$

وتسمى  $R$  دالة راوٲ وهذه هي طريقة تركيب الدالة ولكنها لا تكون دالة راوٲ المتتممة إلا بعد حذف  $\dot{s}_i$  منها وذلك بالتعويض من المعادلات (5) أي:

$$\dot{s}_i = \dot{s}_i(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \beta_i)$$

فتحصل على

$$R = R(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, \beta_i) \quad (10)$$

من المعادلة (٩) يكون

$$dR = \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} d\dot{s}_i - \sum \beta_i d\dot{s}_i - \sum \dot{s}_i d\beta_i \quad (11)$$

ولكن من المعادلة (10)

$$dR = \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=m+1}^n \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \sum_{i=1}^m \frac{\partial R}{\partial \beta_i} \beta_i \quad (12)$$

بمقارنة (11) بـ (12) نحصل على :

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_i} = -\dot{s}_i \quad (13)$$

فإذا عوضنا في معادلات لاجرانج نصل إلى معادلات راوٲ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = m+1, m+2, \dots, n \quad (14)$$

وهذه  $n - m$  من المعادلات والتي لا تتضمن الإحداثيات الغائبة. من ثم يكون عند البداية قد تم حذف الإحداثيات الغائبة بدلاً من حل  $n$  من المعادلات الآتية (معادلات لاجرانج) ثم إجراء الحذف بعد ذلك.

والمعادلات (14) بتكاملها باستخدام الشروط نحصل على  $q_\alpha$  كدالة في  $t$  ثم نعوض في المعادلة  $\frac{\partial R}{\partial \beta_i} = -\dot{s}_i$  والتي بتكاملها نحصل على  $s_i$  كدالة في الزمن

$$s_i = - \int \frac{\partial R}{\partial \beta_i} . dt + c_i$$

وهكذا نحصل على حل كامل للنظام الديناميكي.

### مثال ١:

نظام ديناميكي طاقة الحركة له  $T = \frac{\dot{q}_1^2}{2(a+bq_2^2)} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2$  وطاقة الوضع له  $V = cq_2^2 + d$ . حيث  $a, b, c, d$  ثوابت. أوجد دالة راوٲ واستخدمها لتعيين  $q_1, q_2$  كدوال في الزمن.

### الحل :

$$L = \frac{\dot{q}_1^2}{2(a+bq_2^2)} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - cq_2^2 - d$$

واضح أن  $q_1 = s_1$  هو الإحداثي المهمل (الغائب).

$$\therefore R = L - \beta_1 \dot{s}_1$$

فإن :

$$R = \frac{\dot{s}_1^2}{2(a+bq_2^2)} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - cq_2^2 - \beta \dot{s}_1 - d$$

حيث  $\beta_1$  ثابت من ثوابت الحركة.

ولكن  $R$  يجب أن تكون على الصورة  $R(q_2, \dot{q}_2, \beta_1)$

ولتحقيق ذلك نستخدم العلاقة :

$$\beta_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} = \frac{\dot{s}_i}{a + b q_2^2}$$

$$\therefore \dot{s}_i = \beta_i (a + b q_2^2)$$

بالتعويض في R ينتج أن :

$$R = -\frac{\beta_1^2}{2} (a + b q_2^2) + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 - c q_2^2 - d$$

من المعادلة

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0$$

نحصل على

$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 = 0$$

حيث  $\omega^2 = 2c + b\beta_1^2$  ويكون الحل العام هو

$$q_2 = A \sin(\omega t + \varepsilon)$$

وللحصول على الإحداثي الغائب  $s_1$  كدالة في الزمن نستخدم المعادلة  $\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = \dot{s}_1$  ومنها

$$\dot{s}_1 = \beta_1 (a + b q_2^2)$$

$$s_1 = \int \beta_1 (a + b q_2^2) dt$$

$$q_1 = s_1 = \beta_1 \left( a + \frac{b A^2}{2} \right) t - \frac{\beta_1 b A^2}{4 \omega} \sin(\omega t + \varepsilon) + \text{const.}$$

مثال ٢:

نظام ديناميكي طاقة حركة  $T = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2)$  وطاقة الوضع له  $V = \frac{1}{2} k^2 q_1^2$ . أوجد دالة راووث واستخدمها لإيجاد  $q_1$ .

الحل : الإحداثي الغائب هو  $q_2 = s_2$  ، فيكون :

$$R = L - \beta_2 \dot{s}_2$$

$$R = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} q_1^2 \dot{s}_1^2 - \frac{1}{2} k^2 q_1^2 - \beta_2 \dot{s}_2 \quad \square$$

$$\text{ولكن } \beta_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_2} = q_1^2 \dot{s}_2 \text{ ومنها}$$

$$R = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2} \frac{\beta_2^2}{q_1^2} - \frac{1}{2} k^2 q_1^2 \quad \therefore R = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 - k^2 q_1^2 - \frac{\beta_2^2}{q_1^2}) \quad \square$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} \right) = 0 \quad \text{من المعادلة}$$

$$\ddot{q}_1 - \frac{\beta_2^2}{q_1^3} + k^2 q_1 = 0$$

$$\frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} k^2 q_1^2 + \frac{\beta_2^2}{2} \frac{1}{q_1^2} = \text{const.} = \alpha \quad \text{بالتكامل نحصل على :}$$

$$\dot{q}_1 q_1 = \sqrt{2 \alpha q_1^2 - \beta_2^2 - k^2 q_1^4} \quad \text{ومنها}$$

$$\text{بفصل المتغيرات وبوضع } y = q_1^2 \text{ نحصل على}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2 \alpha y - \beta_2^2 - k^2 y^2}} = 2 \int dt$$

$$y = a \sin(2 k t + b) + c \quad \text{ومنها نحصل على}$$

$$q_1^2 = a \sin(2 k t + b) + c$$

$$c = \frac{\alpha}{k^2}, a^2 = \frac{\alpha^2}{k^4} - \frac{\beta_2^2}{k^2} \quad \text{حيث}$$

## مثال ٣:

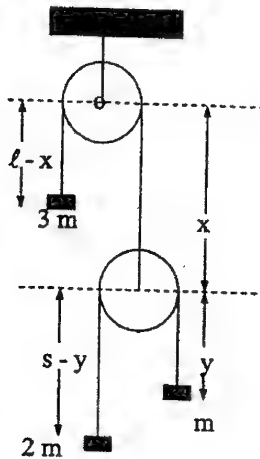
في مجموعة من البكرات الخفيفة الملساء حيث الكتلة  $3m$  معلقة من أحد نهايتي خيط غير مرن طوله  $\ell$  يمر على بكرة خفيفة ملساء ثابتة وعند الطرف الآخر للخيط توجد بكرة خفيفة ملساء يمر عليها خيط غير مرن طوله  $s$  يحمل في أحد طرفيه الكتلة  $m$  والطرف الآخر الكتلة  $2m$ . أوجد:

- أ- القوى المعجمة ب- دالة لاجرانج للمجموعة ج- دالة هاملتون د- دالة راوثن  
و- معادلات لاجرانج وهاملتون وراوثن ه- طبق مبدأ هاملتون للفعل الأقل.

## الحل

المجموعة الديناميكية مكونة من ثلاثة جسيمات  $m$ ،  $2m$ ،  $3m$ . واضح أن  $x$ ،  $y$  هما الإحداثيات المعجمة (انظر الشكل) حيث أنها كافية لتعيين موضع المجموعة. حيث  $x$  هي المسافة بين مركزي البكرتين المتحركة والثابتة،  $y$  هي المسافة بين الكتلة المعلقة  $m$  ومركز البكرة المتحركة. موضع الكتلة  $m$  بالنسبة إلى مركز البكرة الثابتة  $o$  هو  $(x+y)$  موضع الكتلة  $2m$  بالنسبة إلى  $o$  هو موضع الكتلة  $3m$  بالنسبة إلى  $o$  هو  $(\ell - x)$  حيث كلاً من  $\ell$ ،  $s$  ثابت. السرعات المعجمة هي:  $\dot{x}$ ،  $\dot{y}$

شكل (٥ - ١)



السرعات الحقيقية هي:  
سرعة الكتلة  $m$  هي:

$$\frac{d}{dt}(x+y) = \dot{x} + \dot{y}$$

سرعة الكتلة  $2m$  هي :

$$\frac{d}{dt}(x+s-y) = \dot{x} - \dot{y}$$

سرعة الكتلة  $3m$  هي:

$$\frac{d}{dt}(\ell - x) = -\dot{x}$$

الشغل المبذول بواسطة القوى المعممة  $Q_1, Q_2$  في إزاحات الإحداثيات المعممة يساوي الشغل المبذول بواسطة القوى الحقيقية المؤثرة على الجسيمات. أي أن:

$$\sum_v \underline{F}_v \cdot d\underline{r}_v = \sum_{\alpha=1}^n Q_{\alpha} dq_{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \therefore Q_1 dx + Q_2 dy &= 3mg d(\ell - x) + 2mg(x + s - y) \\ &\quad + mg d(x + y) \\ &\quad dx - mg dy \\ \therefore Q_1 &= 0, \quad Q_2 = -mg \end{aligned} \quad = 0$$

وكان يمكن إيجادها بطريقة أخرى :

حيث أن طاقة الموضع  $V$  للمجموعة تتبين من (باتخاذ 0 كموضع للصفر) :

$$\begin{aligned} V &= -3mg(-x) - 2mg(x + s - y) - mg(x + y) \\ &= mgy + C \end{aligned}$$

نجد أن :  $Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$  ,  $Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial y} = -mg$   
طاقة حركة المجموعة:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [3m\dot{x}^2 + 2m(\dot{x} - \dot{y})^2 + m(\dot{x} + \dot{y})^2] \\ &= \frac{1}{2} m (6\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 3\dot{y}^2) \end{aligned}$$

كميات الحركة المعممة :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(6\dot{x} - \dot{y}) , \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m(-\dot{x} + 3\dot{y})$$

ومنها نجد أن :

$$\dot{x} = \frac{3p_1 + p_2}{17m} , \quad \dot{y} = \frac{p_1 + 6p_2}{17m}$$

دالة لاجرانج :  $L = T - V$  (بغض النظر عن الثابت)

$$L = \frac{1}{2} m (6 \dot{x}^2 - 2 \dot{x} \dot{y} + 3 \dot{y}^2) - m g y$$

يلاحظ أن  $x$  إحداثي مهمل.

دالة هاملتون :  $H = T + V$

$$H = \frac{1}{578 m} [6(3 p_1 + p_2)^2 - 2(3 p_1 + p_2)(p_1 + 6 p_2)] + 3(p_1 + 6 p_2)^2 + m g y$$

$$\therefore H = \frac{1}{578 m} (51 p_1^2 + 102 p_2^2 + 34 p_1 p_2) + m g y$$

دالة راوٲ :

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m (6 \dot{x} - \dot{y}) = \text{const.} = C \quad \text{say}$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} m (6 \dot{x} - 2 \dot{x} \dot{y} + 3 \dot{y}^2) - m g - \dot{x} C$$

وللحصول على دالة راوٲ الصحيحة يجب حذف  $x$  منها وحيث أن :

$$\dot{x} = \frac{1}{6} \left( \frac{C}{m} + \dot{y} \right) \quad \therefore R = -\frac{C^2}{12 m} - \frac{C \dot{y}}{6} + \frac{17}{12} m \dot{y}^2 - m g y$$

معادلات لاجرانج :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

ويعطيان

$$m(6 \ddot{x} - \ddot{y}) = 0, \quad m(\ddot{x} - 3 \ddot{y}) = m g$$

ويمكن الحصول على عجالات الكتل حيث عجلة الكتلة  $m$  تساوي  $(\ddot{x} + \ddot{y})$  وعجلة الكتلة  $2m$  هي  $(\ddot{x} - \ddot{y})$  وعجلة  $3m$  هي  $(-\ddot{x})$  وبحل معادلتى لاجرانج في  $\ddot{x}$  ، نجد

$$\text{أن:} \quad \ddot{x} = -\frac{1}{17} g, \quad \ddot{y} = -\frac{6}{17} g$$

معادلات هاملتون :

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial x} \quad \therefore \dot{p}_1 = 0, \quad p_1 = \text{const (C)} \quad (1)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\partial H}{\partial y} \quad \therefore \dot{p}_2 = -m g \quad (2)$$

$$\dot{q}_1 \equiv \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{3 p_1 + p_2}{17 m} \quad (3)$$

$$\dot{q}_2 \equiv \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{6 p_2 + p_1}{17 m} \quad (4)$$

معادلات راوٲ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial R}{\partial y} &= 0 \quad \therefore \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{6} C + \frac{17}{6} m \dot{y} \right) + m g = 0 \\ \therefore \frac{17}{6} m \ddot{y} &= -m g \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها من معادلات لاجرانج.

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial C} &= -\dot{x} \quad \therefore -\frac{C}{6 m} - \frac{\dot{y}}{6} = -\dot{x} \\ \dot{x} &= \frac{1}{6} \left( \frac{C}{m} + \dot{y} \right) \quad \therefore \ddot{x} = \frac{1}{6} \ddot{y} = -\frac{1}{17} g \quad \text{or} \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها من معادلات لاجرانج.

مبدأ هاملتون للفعل الأقل :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad \text{or} \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

وباستخدام صيغة L

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} m (12 \dot{x} \delta \dot{x} - 2 \dot{x} \delta \dot{y} - 2 \dot{y} \delta \dot{y} + 6 \dot{y} \delta \dot{y}) \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} mgy dt = 0$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} (6 \dot{x} - \dot{y}) d(\delta x) + m \int_{t_1}^{t_2} (3 \dot{y} - \dot{x}) d(\delta y) - mg \int_{t_1}^{t_2} \delta y dt = 0$$

بالتكامل بالتجزئي للتكامل الأول والثاني :

$$\therefore m[(6 \dot{x} - \dot{y})(\delta x)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (6 \ddot{x} - \ddot{y})(\delta x) dt$$

$$+ m[(3 \dot{y} - \dot{x})(\delta y)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (3 \ddot{y} - \ddot{x})(\delta y) dt - mg \int_{t_1}^{t_2} (\delta y) dt$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} (-6 \ddot{x} + \ddot{y})(\delta x) dt + m \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{x} - 3 \ddot{y} - g)(\delta y) dt = 0$$

وهذا لا يتأتى إلا إذا كانت الكميات تحت التكامل تساوي الصفر حيث أن الإزاحات  $\delta x, \delta y$  اختيارية وبذلك نحصل على :

$$m(-6 \ddot{x} + \ddot{y}) = 0, \quad m(\ddot{x} - 3 \ddot{y} - g) = 0$$

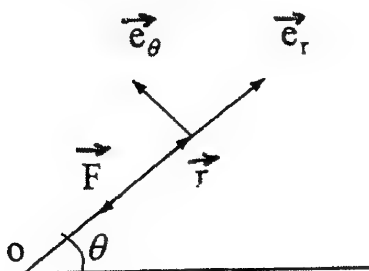
وهي نفس المعادلات السابق الحصول عليها من معادلات لاجرانج.

#### مثال ٤:

يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية جاذبة  $\vec{F} = -(\mu m/r^3) \vec{r}$  حيث  $m$  هي كتلة الجسيم،  $\mu$  ثابت،  $\vec{r}$  متجه الموضع. أوجد دوال لاجرانج وهاملتون وراوٹ ومعادلاتهم.

## الحل

شكل (٢ - ٥)



المجموعة الديناميكية مكونة من  
جسيم واحد. الإحداثيات المعممة  
هي:

$$q_2 = \theta, q_1 = r$$

السرعات المعممة هي:

$$\dot{q}_2 = \dot{\theta}, \dot{q}_1 = \dot{r}$$

السرعات الحقيقية هي  $\dot{r}$  ،  $r\dot{\theta}$  والقوى المعممة  $Q_1$  ،  $Q_2$  تتعين من:

$$Q_1 dr + Q_2 d\theta = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{\mu m}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{\mu m}{r^2} dr$$

$$\therefore Q_1 = -\frac{\mu m}{r^2}, \quad Q_2 = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad \text{طاقة الحركة هي :}$$

طاقة الموضع تتعين من :  $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r, \theta)$

$$\therefore -\frac{\mu m}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad \text{i.e. } V \equiv V(r)$$

أي أن  $V$  هي دالة في  $r$  فقط. كذلك

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dr} = \frac{\mu m}{r^2}$$

$$\therefore V = -\frac{\mu m}{r} + C \quad \text{وبالتكامل :}$$

$$\therefore V = -\frac{\mu m}{r} \quad \text{بفرض أن } V=0 \text{ عند } r=\infty \text{ إذن } C=0 \text{ وتصبح } V \text{ كالتالي :}$$

وكان يمكن الحصول على  $V$  من التعريف:

$$V = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \mu m \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = - \frac{\mu m}{r}$$

كميات الحركة المعممة هي :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} ; p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

ومنها

$$\dot{r} = \frac{p_1}{m} , \quad \dot{\theta} = \frac{p_2}{m r^2}$$

دالة لا جرانج:  $L = T - V$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\mu m}{r}$$

دالة هاميلتون:  $H = T + V$

$$\therefore H = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\mu m}{r} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m r^2} - \frac{\mu m}{r}$$

هو إحدائي مهمل.  $q_2 \equiv \theta$  واضح أن دالة راوٲ :

حيث أن  $\theta$  هو إحدائي مهمل

$$\therefore p_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \text{const.} = C \text{ say}$$

$$\therefore p_2 \equiv m r^2 \dot{\theta} = C \quad \text{or} \quad \dot{\theta} = \frac{C}{m r^2}$$

دالة راوٲ  $R$  هي:  $R = L - C \dot{\theta}$

$$\therefore R = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\mu m}{r} - C \dot{\theta}$$

ويجب حذف  $\dot{\theta}$  منها:

$$R = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \frac{C^2}{m^2 r^4}) + \frac{\mu m}{r} - \frac{C^2}{m r^2}$$

### معادلات لاجرانج :

$$\frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) = 0 \Rightarrow m r^2 \dot{\theta} = \text{const} = C \quad (2)$$

معادلات هاملتون :

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m r^2} \quad (4)$$

المعادلات (1)، (3) تكافئان المعادلة (1) من معادلات لاجرانج.

المعادلات (2)، (4) " " (2) " " " "

### معادلات راوٹ :

$$\frac{\partial R}{\partial C} = -\dot{\theta} \quad \text{كذلك:}$$

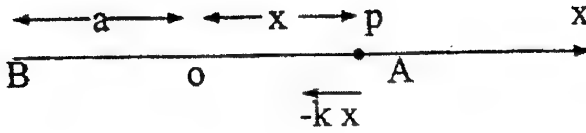
أي أن :  $-\dot{\theta} = -\frac{C}{mr^2}$

مثال ٥:

أوجد معادلات هاملتون للمتذبذب. كذلك عين مسار النقطة الممكنة لحالة المتذبذب في فراغ الطور.

الحل

شكل (٥-٣)



المتذبذب التوافقي

الخطي عبارة عن

جسيم يتحرك في

خط مستقيم حركة

تذبذبية حول نقطة

ثابتة O

على هذا الخط تحت تأثير قوة جاذبة نحو O مقدارها  $kx$ . نهايتي المسار هما النقطتين A، B حيث  $OA = OB = a$  أو متسع الحركة.

معادلة حركة جسيم هي:

حيث  $a$  تسمى سعة الحركة

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x, \quad \frac{m}{m} = \omega^2$$

$$\text{الزمن الدوري للحركة } \tau = \frac{2\pi}{\omega} \text{ والتردد } \nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$$

الإحداثي المهمل الوحيد هو  $Q \equiv x$  والسرعة المعممة هي  $\dot{q} = \dot{x}$  وهي نفس السرعة الحقيقية للجسيم.

$$\text{طاقة الحركة هي : } T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{2} k x^2 \quad V = - \int_0^x (-k x) dx \quad \text{طاقة الوضع هي :}$$

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \text{كمية الحركة المعممة هي :}$$

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad \text{وهي نفس كمية الحركة الحقيقية للجسيم ومنها}$$

$$L = T - V \quad \text{دالة لاجرانج:}$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

معادلة لاجرانج:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + k x = 0$$

وهي نفس قانون نيوتن الثاني.

$$H = T + V \quad \text{دالة هاميلتون:}$$

$$\therefore H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

معادلات هاميلتون:

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} = -k x, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

والمعادلتان تكافئان معاً معادلة لاجرانج.

فراغ الطور: في هذه الحالة فإن فراغ الطور يكون له بعدين فقط ومحورين هما محور

x ومحور p. معادلة مسار النقطة الممثلة لحالة الجسيم في فراغ الطور هي :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m \omega^2}{2} x^2 = \text{const.} = E$$

$$\text{حيث } E = \frac{m \omega^2 a^2}{2} \text{ هي الطاقة الكلية للجسيم وتصبح المعادلة}$$

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \frac{m\omega^2 a^2}{2}$$

or

$$\frac{p^2}{m^2 \omega^2 a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص أنصاف أقطاره هي  $a$ ،  $m\omega a$  مع ملاحظة أن  $a$  هي سعة الحركة،  $m\omega a$  هي كمية حركة الجسم العظمى التي يكتسبها عند مروره بنقطة الأصل  $o$ .

### مثال ٦:

أوجد معادلات هاملتون وراوٲ في حالة البندول الكروي.

### الحل

درسنا قبل ذلك مسألة البندول الكروي وأوجدنا معادلات لاجرانج له.

دالة هاملتون للبندول الكروي هي:  $H = T + V$

$$\therefore H = \frac{1}{2} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2) - m g a \cos \theta$$

كمية الحركة المعممة :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m a^2 \dot{\theta} \quad , \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m a^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}$$

ومنها

$$\dot{\theta} = \frac{p_1}{m a^2} \quad , \quad \dot{\phi} = \frac{p_2}{m a^2 \sin^2 \theta}$$

ولكي تكون دالة هاملتون  $H$  في الصورة الصحيحة يجب أن تكون دالة في

$(\theta, \phi, p_1, p_2)$  أي يجب حذف  $\dot{\theta}, \dot{\phi}$  منها

$$\therefore H = \frac{p_1^2}{2 m a^2} + \frac{p_2^2}{2 m a^2 \sin^2 \theta} - m g a \cos \theta$$

معادلات هاملتون:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_2^2 \cos \theta}{m a^2 \sin^3 \theta} - m g a \sin \theta \quad (1) \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m a^2} \quad (3)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m a^2 \sin^2 \theta} \quad (4)$$

واضح أن  $\phi$  هو إحداثي مهمل. أي أن :

$$p_2 = \text{const.} = C \quad \text{say}$$

المعادلتان (1)، (3) معاً يكافئان المعادلة الأولى من معادلات لاگرانج، المعادلتان (2)،

(4) معاً يكافئان المعادلة الثانية من معادلات لاگرانج.

دالة راووث R يمكن كتابتها كالآتي :

$$R = L - C \dot{\phi}$$

حيث الدالة R هي دالة في  $\theta$  ،  $\dot{\theta}$  ، C وعلى ذلك يجب حذف  $\dot{\phi}$  منها

$$R = \frac{1}{2} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2) + m g a \cos \theta - C \dot{\phi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_2}{m a^2 \sin^2 \theta} = \frac{C}{m a^2 \sin^2 \theta} \quad \text{وحيث أن:}$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{C^2}{2 m a^2 \sin^2 \theta} + m g a \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0 \quad \text{معادلة راووث :}$$

$$\frac{d}{dt} (m a^2 \dot{\theta}) - \left[ \frac{C^2 \cos \theta}{m a^2 \sin^3 \theta} - m g a \sin \theta \right] = 0$$

$$\therefore m a^2 \ddot{\theta} - \frac{C^2 \cos \theta}{m a^2 \sin^3 \theta} + m g a \sin \theta = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial C} = -\dot{\phi}$$

كذلك نجد أن :

أي أن :

$$-\frac{C}{m a^2 \sin^2 \theta} = -\dot{\phi} \quad (6)$$

وهي نفس المعادلة التي حصلنا عليها من قبل.

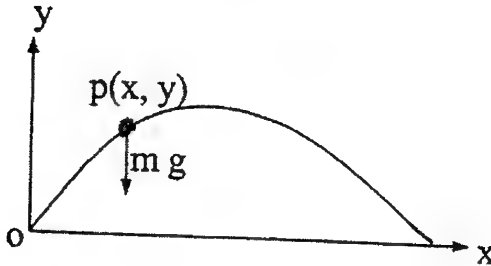
بحل المعادلة (5) واستخدام الشروط الابتدائية نحصل على  $\theta \equiv \theta(t)$  وبتعويضها (6) والتكامل فإننا نحصل على  $\phi \equiv \phi(t)$  وبذلك نكون قد حصلنا على الحل الكامل للمسألة أي بإيجاد  $\phi, \theta$  كدوال في الزمن  $t$ .

### مثال ٧:

في حركة المقذوفات في وسط غير مقاوم اكتب معادلات لاجرانج وهاملتون وراوٲ.

### الحل

شكل (٥ - ٤)



بفرض أن كتلة الجسم هي

$$p(x, y), m$$

موضع الجسم عند اللحظة  $t$ .

طالة الحركة للجسيم هي:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

$$V = m g y$$

دالة الموضع هي:

$$L = T - V$$

دالة لاجرانج هي:

$$\therefore L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y$$

معادلات لاگرانج :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 ,$$

$$\therefore m \ddot{x} = 0 \quad (1),$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$m \ddot{y} = -m g \quad (2)$$

وهي المعادلات المعتادة التي نحصل عليها بتطبيق قانون نيوتن الثاني

دالة هاملتون:  $H = T + V$ 

$$\therefore H = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m g y$$

للحصول على دالة هاملتون الصحيحة يجب أن تكتب بدلالة  $x, y, p_1, p_2$  حيث

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} , \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m \dot{y}$$

$$\therefore \dot{x} = \frac{p_1}{m} , \quad \dot{y} = \frac{p_2}{m} \quad \square$$

$$\therefore H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + m g y \quad \square$$

معادلات هاملتون :

$$\dot{p}_1 = - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (i)$$

$$\dot{p}_2 = - \frac{\partial H}{\partial y} = -m g \quad (ii)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \quad (iii)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m} \quad (iv)$$

(i), (iii) تكافئان معاً المعادلة (1) من معادلات لاگرانج.

(ii), (iv) تكافئان معاً المعادلة (2) من معادلات لاگرانج.

يلاحظ أن  $L$  أو  $H$  أن  $x$  إحداثي مهمل وعلى ذلك فإن :

$$\dot{p}_1 = 0$$

$$\text{or } p_1 = \text{const.} = C \quad \text{say}$$

$$R = L - C \dot{x} \quad \text{دالة راووث:}$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y - C \dot{x}$$

ويجب حذف  $\dot{x}$  منها للحصول على دالة راوٲ الصحيحة

$$[R \equiv R(y, \dot{y}, C)]$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{C^2}{2m} - m g y$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \quad \text{معادلة راوٲ:}$$

$$\text{or} \quad m \ddot{y} + m g = 0$$

وهي نفس المعادلة (2) من معادلات لاجرانج ومنها نحصل على  $y$  كدالة في  $t$  أما  $x$

$$\frac{\partial R}{\partial C} = -\dot{x} \quad (\text{الإحداثي المهمل}) \text{ فنحصل عليه من:}$$

$$\therefore -\frac{C}{m} = -\dot{x} \quad \therefore \ddot{x} = 0$$

وهي نفس المعادلة (1) من معادلات لاجرانج.

### مثال ٨:

في حالة قضيب منتظم حر الحركة حول أحد طرفيه الثابت. أوجد معادلات هاملتون وراوٲ.

### الحل

وجدنا أن طاقتي الحركة والموضع يعطيان من:

$$T = \frac{2}{3} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

$$V = -m g a \cos \theta + \text{const.}$$

حيث الإحداثيات المعممة هنا هي  $q_1 = \theta$  ،  $q_2 = \phi$

كميات الحركة المعممة:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} m a^2 \dot{\theta}$$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{3 p_1}{4 m a^2}$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{4}{3} m a^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}$$

$$\therefore \dot{\phi} = \frac{3 p_2}{4 m a^2 \sin^2 \theta}$$

دالة هاملتون:  $H = T + V$

$$\therefore H = \frac{3 p_1^2}{8 m a^2} + \frac{3 p_2^2}{8 m a^2 \sin^2 \theta} - m g a \cos \theta$$

معادلات هاملتون :

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{3 p_1^2 \cos \theta}{4 m a^2 \sin^3 \theta} - m g a \sin \theta \quad (1)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{3 p_1}{4 m a^2} \quad (3)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{3 p_2}{4 m a^2 \sin^2 \theta} \quad (4)$$

المعادلتان (1)، (3) تكافئان المعادلة (1) من معادلات لاگرانج.

المعادلتان (2)، (4) تكافئان المعادلة (2) من معادلات لاگرانج.

واضح هنا أن الإحداثي المعمم  $\phi$  هو إحداثي مهمل وعلى ذلك فإن :

$$\dot{p}_2 = 0 \quad \text{or} \quad p_2 = \text{const} = C \quad \text{say}$$

$$\therefore \frac{4}{3} m a^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi} = C$$

$$\therefore \dot{\phi} = \frac{3 C}{4 m a^2 \sin^2 \theta} \quad (*)$$

دالة راوٲ هي:  $R = L - C \dot{\phi}$

$$\therefore R = \frac{2}{3} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + m g a \cos \theta - C \dot{\phi}$$

يجب حذف  $\dot{\phi}$  من  $R$  للحصول على دالة راووث الصحيحة والتي تعتمد على  $(\theta, \dot{\theta}, C)$

$$R = \frac{2}{3} m a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{3 C^2}{8 m a^2 \sin^2 \theta} + m g a \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0 \quad \text{معادلة راووث :}$$

$$\therefore \frac{4}{3} m a^2 \ddot{\theta} - \frac{3 C^2}{4 m a^2} \operatorname{cosec}^2 \theta \cot \theta + m g a \sin \theta = 0$$

وهي نفس المعادلة (1) التي حصلنا عليها من معادلات لاگرانج. هذه المعادلة تعين  $\theta$  كدالة في الزمن  $t$  وهناك معادلة أخرى تعين الإحداثي المهمل  $\phi$  نحصل عليها

$$\frac{\partial R}{\partial C} = -\dot{\phi} \quad \text{من:}$$

$$-\frac{3 C}{4 m a^2 \sin^2 \theta} = -\dot{\phi}$$

وهي نفس المعادلة (\*) ونفس المعادلة (2) من معادلات لاگرانج.

#### مثال ٧:

في مسألة النحلة اكتب دالة راووث وأوجد معادلات راووث.

#### الحل

الإحداثيات المعممة في هذه الحالة هي زوايا أولير:

$$q_3 \equiv \psi, \quad q_2 \equiv \phi, \quad q_1 \equiv \theta$$

السرعات المعممة هي  $\dot{q}_1 \equiv \dot{\theta}, \quad \dot{q}_2 \equiv \dot{\phi}, \quad \dot{q}_3 \equiv \dot{\psi}$

كميات الحركة المعممة هي  $p_1, p_2, p_3$

كما رأينا من دراستنا لمسألة النحلة من قبل أن :

$$T = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 ,$$

$$V = m g h \cos \theta$$

دالة لاجرانج هي:  $L = T - V$

$$\therefore L = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - m g h \cos \theta$$

واضح أن  $L$  لا تحتوي على الإحداثيين  $\phi$  ،  $\psi$  وعلى ذلك فإنهما إحداثيات مهمة.

$$\therefore p_2 \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = I_{11} \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi} + I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta$$

$$p_2 = \text{const.} \equiv I_{33} C_1 \quad \text{say} \quad (1)$$

$$p_3 \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad \text{كذلك}$$

$$p_3 = \text{const.} \equiv I_{33} C_2 \quad \text{say} \quad (2)$$

$$\therefore \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = C_2 \quad (2)'$$

بالتعويض من (2) في (1)

$$\therefore I_{11} \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi} + I_{33} C_2 \cos \theta = I_{33} C_1$$

$$\therefore \dot{\phi} = \frac{I_{33} (C_1 - C_2 \cos \theta)}{I_{11} \sin^2 \theta} \quad (3)$$

نعين دالة راوٲ من

$$R = L - I_{33} C_1 \dot{\phi} - I_{33} C_2 \dot{\psi}$$

$$\text{or} \quad R = \frac{1}{2} \dot{\theta} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{1}{2} \dot{\phi} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{1}{2} \dot{\psi} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - V$$

$$R = \frac{1}{2} [I_{11} \dot{\theta}^2 - I_{11} \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2 - I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \cos \theta - I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\psi}] - m g h \cos \theta$$

وبحذف  $\dot{\psi}$ ،  $\dot{\phi}$  من  $R$  حيث أن  $R$  يجب أن تكون دالة في  $(C_2, C_1, \dot{\theta}, \theta)$  نحصل على

$$R = \frac{1}{2} [I_{11} \dot{\theta}^2 - \frac{I_{33} (C_1 - C_2 \cos \theta)^2}{I_{11} \sin^2 \theta} - I_{33} C_2^2] - m g h \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0 \quad \text{معادلات راوٲ :}$$

$$I_{11} \ddot{\theta} - \left[ \frac{I_{33} (C_1 - C_2 \cos \theta) (C_1 \cos \theta - C_2)}{\sin^3 \theta} + m g h \sin \theta \right] = 0$$

تعيّن  $\theta(t)$  أما  $\phi$  فتتعيّن من (3) بالتكامل وبعد التعويض عن  $\theta \equiv \theta(t)$  من المعادلة السابقة وأما  $\psi$  فتتعيّن بالتكامل من (2)

$$\dot{\psi} = C_2 - \dot{\phi} \cos \theta$$

# الفصل السادس

التحويلات القانونية ومعادلة هاملتون – جاكوبي  
Canonical transformations - The Hamilton – Jacobi-theory

- \* التحويلات القانونية أو تحويلات التماس
- \* الدوال المولدة
- \* شرط التحويلات القانونية
- \* معادلة هاملتون-جاكوبي
- \* أمثلة وتمارين

## الفصل السادس

التحويلات القانونية ومعادلة هاميلتون - جاكوبي  
Canonical Transformations - The Hamilton - Jacobi-theory

## أولاً: التحويلات القانونية أو تحويلات التماس

## Cannonical or Contact Transformations

تلعب التحويلات دوراً رئيسياً في جعل عملية حل مسائل الديناميكا أكثر سهولة حيث يمكن تحويل معادلات الحركة إلى صورة أخرى يمكن معاملتها بسهولة أكبر من المعادلات الأصلية.

فلحل مسألة ديناميكية يجب صياغتها رياضياً وذلك باختيار الإحداثيات المعممة المناسبة وتكوين  $L, H$  ثم كتابة معادلات لاگرانج أو هاميلتون ثم نحل هذه المعادلات. من ثم يتوقف سهولة الحل لمسائل الديناميكا عادة على الاختيار المناسب للإحداثيات المعممة (يمكن اختيار أنواع أخرى بينها إحداثيات مهمة) وواضح أنه كلما زادت الإحداثيات المهمة كلما زادت سهولة الحل الرياضي للمسألة.

وعلى سبيل المثال إذا أمكن تحويل مجموعة الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  إلى مجموعة جديدة  $Q_\alpha$  بحيث يكون بعض هذه الإحداثيات الجديدة مستترة أو مهمة (دورية) فيكون هذا تبسيط كبير ومطلوب. ومن أنواع التحويلات التي يمكن دراستها تلك التي لا تغير معادلات لاگرانج أو تلك التحويلات التي لا تغير معادلات هاميلتون.

والآن فإذا فرضنا أن  $q_\alpha, p_\alpha$  هما الإحداثيات وكميات الحركة القديمة لنظام ديناميكي وأن  $Q_\alpha, P_\alpha$  هي المواضع وكميات الحركة الجديدة فإن معادلات التحويل من الإحداثيات القديمة والجديدة هي :

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$$

$$P_\alpha = P_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$$

ويمكن كتابتها في الصورة المبسطة :

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t) \\ P_\alpha &= P_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t) \end{aligned} \quad (1)$$

التحويلات (١) تسمى بالتحويلات القانونية أو تلامسية إذا وجدت لها الدالة  $\bar{H}(q_\alpha, p_\alpha, t)$  (دالة هاملتون) في الإحداثيات الجديدة  $Q_\alpha, P_\alpha$  بحيث يكون

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_\alpha} \quad (2)$$

وتكون دالة لاجرانج في كل من الإحداثيات القديمة والجديدة هي  $L(q_\alpha, p_\alpha, t)$  ،  $\bar{L}(q_\alpha, p_\alpha, t)$

عندئذ تكون دالة هاملتون الجديدة والقديمة هي

$$H = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \quad \bar{H} = \sum_{\alpha=1}^N P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \bar{L}$$

ومعادلات لاجرانج القديمة والحديثة

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_\alpha}$$

### ملاحظات :

التحويلة (١) تجعل شكل معادلات الحركة لا تتغير من حيث شكلها الأصلي كما في معادلات لاجرانج وهاملتون.

تسمى التحويل  $Q_\alpha = Q_\alpha(q, \dot{q}, t)$  بالتحويل النقطي Point Transformation ويلزم فيه تغيير عدد  $n$  من الإحداثيات المستقلة بعدد  $n$  من الإحداثيات الجديدة والمستقلة أيضا.

وبالطبع فإن دالة لاجرانج  $\bar{L}$  في الإحداثيات الجديدة يكون لها نفس القيمة حيث أنها لا تزال تحكمها العلاقة  $\bar{L} = T - V$ ؛ ولكن شكل دالة لاجرانج قد يتغير ولذلك فهي  $\bar{L}$  حيث:

$$\bar{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t) = L - V$$

ومن الواضح أيضا أن معادلات لاجرانج تظل كما هي من ناحية الشكل بالنسبة للإحداثيات الجديدة. حيث تحتفظ معادلات الحركة السابقة بشكلها الأصلي. وحيث أن معادلات لاجرانج لا تتغير في هذا النوع من التحويل فإن معادلات هاملتون لا تتغير بدورها نتيجة لإجراء هذا النوع من التحويلات

ونظرا لأن دالة هاملتون  $H(p, q, t)$  لا تعتمد فقط على الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  وإنما أيضا على كميات الحركة المعممة  $p_\alpha$  وكل هذه المتغيرات مستقلة وعددها  $2n$ . ولذلك فإن التحويلات عموما يمكن أن تنقلنا من المتغيرات القديمة  $(q_\alpha, p_\alpha)$  وعددها  $2n$  إلى المتغيرات الجديدة  $(Q_\alpha, P_\alpha)$  وعددها  $2n$  أيضا.

وهذه التحويلات العامة أشمل من التحويل النقطي في (١). ولذلك فإنه في حالة استخدام معادلات هاملتون فإننا نحتاج على وجه العموم لمعادلات التحويل (٢). وعموما إذا ما استخدمت هذه التحويلات الجديدة فإنه من الممكن ألا تحتفظ معادلات الحركة بشكلها القانوني. ولكن سوف ندرس فقط التحويلات التي تسمى قانونية والتي توجد لها دالة جديدة لهاملتون ولتكن  $\bar{H}$  في الإحداثيات الجديدة بحيث تحقق العلاقتين في (٢)  $\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_\alpha}$  ،  $\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_\alpha}$  وفي هذه الحالة تسمى  $Q_\alpha, P_\alpha$  إحداثيات قانونية.

ملاحظات هامة:

شرط أن التحويلات (١) قانونية هو أن :

$$\sum p_\alpha dq_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha$$

تفاضل تام.

هناك التحويلات العكسية أي

$$p_\alpha = p_\alpha(Q_\alpha, P_\alpha, t) \quad , \quad q_\alpha = q_\alpha(Q_\alpha, P_\alpha, t)$$

مثال ١:

$$P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \quad , \quad Q = \tan^{-1}(q/p) \quad \text{برهن على أن التحويلات:}$$

تحويلات قانونية.

الحل

لإثبات أن التحويلات قانونية يجب التحقق من أن :

$$\sum p_\alpha dq_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha$$

تفاضل تام.

في التحويلات المعطاة يكون

$$\begin{aligned} p dq - P dQ &= p dq - \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \frac{p dq - q dp}{p^2 + q^2} \\ &= \frac{1}{2}(p dq + q dp) = d\left(\frac{pq}{2}\right) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad , \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

حل آخر : بصفة عامة فإن:

ولكن

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \frac{\partial p}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial p}{\partial Q} \dot{Q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial q}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

أيضاً

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} &= - \frac{\partial p}{\partial P} \dot{P} - \frac{\partial p}{\partial Q} \dot{Q} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{\partial q}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ما سبق كان بصفة عامة لأي تحويل (وبالنسبة للتحويل المعطى في المسألة) فإن :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial P} = p, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = q \\ \frac{\partial Q}{\partial p} = - \frac{q}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{p}{p^2 + q^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

كذلك بتفاضل معادلات التحويل المعطى بالنسبة إلى  $P, Q$  على الترتيب نحصل على :

$$\begin{aligned} 1 &= p \frac{\partial p}{\partial P} + q \frac{\partial q}{\partial P}, \quad 0 = p \frac{\partial q}{\partial P} \\ 0 &= p \frac{\partial p}{\partial Q} + q \frac{\partial q}{\partial Q}, \quad 1 = \frac{p \frac{\partial p}{\partial Q} - q \frac{\partial q}{\partial Q}}{p^2 + q^2} \end{aligned} \quad (6)$$

بحل المعادلات السابقة آنياً ينتج أن :

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{p}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial P} = \frac{q}{p^2 + q^2}$$

بالتعويض من (٥)، (٦)، في (٤) نحصل على:

$$\begin{aligned} q \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} + \frac{p}{p^2 + q^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} &= - \frac{p}{p^2 + q^2} \dot{P} - q \dot{Q} \\ p \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} + \frac{q}{p^2 + q^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} &= \frac{q}{p^2 + q^2} \dot{P} + p \dot{Q} \end{aligned} \quad (7)$$

بحل المعادلتين في (٧) نلاحظ أنها تتحقق إذا كان:

$$\dot{P} = - \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P}$$

## ٢-٥ الدوال المولدة Generating Functions

من مبدأ هاملتون فان كل من التحويلات القانونية القديمة والجديدة (التحويل القانوني)  $Q_\alpha = Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$  ؛  $P_\alpha = P_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$  يجب تحقق الشرط:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{L} dt = 0, \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (8)$$

بالطرح ينتج أن:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - \bar{L}) dt = 0 \quad (9)$$

$$\therefore \delta \int_{t_1}^{t_2} (L - \ell) dt = 0$$

وهذا يتحقق في الحالتين التاليتين:

- (i) الكميات تحت علامة التكامل واحدة أي أن:  $L = \bar{L}$
- (ii) أو يكون الفرق بينهم هو على الأكثر تفاضل تام لدالة اختيارية  $G$  في الزمن وإحداثيات العموم القديمة والجديدة أي أن:

$$L - \bar{L} = \frac{dG}{dt} \quad (10)$$

$$\therefore \delta \int_1^2 (L - \bar{L}) dt = \delta \int_1^2 \frac{dG}{dt} dt$$

$$\delta \int_1^2 dG = \delta \{G(t_2) - G(t_1)\} = 0$$

وذلك لأن الفرق بين التكاملين مقدارا ثابتا يساوى الفرق بين قيمتي الدالة  $G$  عند حدود التكامل. تسمى الدالة  $G$  بالدالة المولدة للتحويل Generating function وذلك لأنه متى علمت الدالة  $G$  فإن معادلات التحويل تتحدد تماماً. ولكي يحدث هذا التحويل يجب أن تكون  $G$  دالة في الإحداثيات القديمة والجديدة والزمن أي  $G = G(q_\alpha, p_\alpha, Q_\alpha, P_\alpha, t)$  ولكن في الحقيقية عدد  $2(n+1)$  فقط من المتغيرات مستقلة لأنه من المفروض أن معادلات التحويل وعددهم  $2n$  تربط بين هذه المتغيرات لذا يكفي أن تكون  $G$  دالة في عدد  $2(n+1)$  فقط من الـ  $4(n+1)$  متغيرات السابقة والتي يمكن اختيارهم بأربعة طرق : ( الصور الأربع الأساسية الآتية للدالة المولدة للتحويل):

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} G_1(q, Q, t) , & \text{(ii)} G_2(q, P, t) \\ \text{(iii)} G_3(p, Q, t) , & \text{(iv)} G_4(p, P, t) \end{array}$$

وحتى يمكن التعرف على هذه الدوال فإننا نعود للمعادلة:

$$L - \bar{L} = \frac{dG}{dt}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$\left( \sum_{s=1}^n p_s dq_s - H(p, q, t) dt \right) - \left( \sum_{s=1}^n P_s dQ_s - \bar{H}(Q, p, t) dt \right) = dG$$

والتي يمكن إعادة صياغتها على النحو التالي:

$$dG = \sum_s (p_s dq_s - P_s dQ_s) + (\bar{H} - H) dt \quad (11)$$

أولاً: إذا كانت  $G_1 = G_1(q_\alpha, Q_\alpha, t)$

في هذه الحالة الدالة  $G$  تعتمد على المواضع القديمة والجديدة والزمن وفيها يمكن الحصول علي التحويل من:

$$p_\alpha = \frac{\partial G_1}{\partial q_\alpha}, P_\alpha = -\frac{\partial G_1}{\partial Q_\alpha}, \bar{H} = H + \frac{\partial G_1}{\partial t}$$

البرهان :

$$\therefore \frac{dG_1}{dt} = L - \bar{L} = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - H - \sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \bar{H} \quad (2)$$

إذن

$$\therefore dG_1 = \sum (p_\alpha dq_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha) + (\bar{H} - H)dt \quad (3)$$

وحيث أن  $G_1 = G_1(q_\alpha, Q_\alpha, t)$  فإن

$$dG_1 = \sum \frac{\partial G_1}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial G_1}{\partial Q_\alpha} dQ_\alpha + \frac{\partial G_1}{\partial t} dt \quad (4)$$

بمقارنة (٤)، (٥) نحصل على :

$$p_\alpha = \frac{\partial G_1}{\partial q_\alpha}, P_\alpha = -\frac{\partial G_1}{\partial Q_\alpha}, \bar{H} - H = \frac{\partial G_1}{\partial t} \quad (5)$$

ويمكن الحصول على أن :

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_\alpha}$$

حيث أن  $\bar{H}$  تمثل دالة هاملتون في الإحداثيات  $P_\alpha, Q_\alpha$  وبالتالي تتحقق معادلات هاملتون كما سبق إثباتها.

يلاحظ أن الطرف الثاني من المعادلة (5) دالة في  $P_\alpha, Q_\alpha$  . وحيث أن هدفنا من استخدام الدوال المولدة الحصول على دوال التحويل وهي

$$Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t), \quad P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$$

فإن المعادلات  $p_\alpha = \frac{\partial G_1}{\partial q_\alpha}$  تصبح فيها المجاهيل هي  $Q_\alpha$  وبحل هذه المعادلات نحصل

على دوال التحويل الأولى وهي  $Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$  وبالتعويض في المعادلة  $P_\alpha = -\frac{\partial G_1}{\partial Q_\alpha}$

نحصل على دوال التحويل الثانية  $P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$  وبالتعويض في المعادلات  $\bar{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t}$  نحصل على  $\bar{H}$  كذلك في  $P_\alpha, Q_\alpha, t$  وذلك بعد أن نكون

قد أوجدنا دوال التحويل العكسي  $q_\alpha(P_\alpha, Q_\alpha, t)$  ،  $p_\alpha(P_\alpha, Q_\alpha, t)$

### مثال ٢:

إذا كانت لدينا منظومة ميكانيكية لها دالة هاملتون على الصورة:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

حيث  $m, \omega$  كميات ثابتة. استخدم الدالة المولدة للتحويل التالية:

$$G_1 = \frac{m\omega}{2}q^2 \cot \alpha Q$$

لإيجاد التحويلات القانونية - ثم أوجد دالة هاملتون الجديدة وأكتب معادلات هاملتون القانونية في المتغيرات الجديدة.

### الحل

$$G_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2}q^2 \cot \alpha Q \quad \text{من الواضح أن:}$$

فهي من النوع الأول من التحويلات والتي فيها:

$$p = \frac{\partial G_1}{\partial q}, \quad (1)$$

$$P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q} \quad (2)$$

وأیضا  $Q_1$  لا تعتمد على الزمن فيكون:

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} = 0 = \bar{H} - H \Rightarrow \bar{H} = H \quad (3)$$

فيكون من المعادلة (١) أن:

$$p = \frac{\partial G_1}{\partial q} \Rightarrow p = m\omega q \cot \alpha n Q \quad (4)$$

$$\therefore P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q}$$

$$\begin{aligned} \therefore P + \frac{m\omega}{2} q \csc^2 Q &= \frac{m\omega}{2} q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} \\ &= \frac{m\omega}{2} q^2 (1 + \cot^2 Q) \\ &= \frac{m\omega}{2} q^2 \left(1 + \frac{p^2}{m^2 \omega^2 q^2}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$P = \frac{1}{2m\omega} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2) \quad (6)$$

وكذلك من (٤) نجد أن:

$$Q = \cot \alpha n^{-1} \left( \frac{p}{m\omega q} \right)$$

وهذه هي المتغيرات الجديدة  $Q, P$  بدلالة المتغيرات القديمة والتي تسمى بالتحويلات القانونية. وكذلك لإيجاد دالة هاميلتون الجديدة نجد من (٣) أن:

$$\bar{H} = H$$

$$\bar{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

ولكن يجب الآن التعبير عن  $q, p$  بدلالة المتغيرات الجديدة فنجد أن:

$$\bar{H} = \frac{1}{2m} (m^2 \omega^2 \cot^2 \alpha n^2 Q (\frac{2}{m\omega} P \sin^2 Q) + \frac{m\omega^2}{2} (\frac{2}{m\omega} P \sin^2 Q))$$

$$\bar{H} = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q$$

$$\bar{H} = \omega P (\cos^2 Q + \sin^2 Q)$$

$$\bar{H} = \omega P$$

وهذه هي دالة هاملتون الجديدة.

أما معادلات هاملتون الجديدة تصبح:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q = (\omega t + \alpha)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{const.}$$

$$P = \frac{E}{\omega} \quad \text{وليكن}$$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة في بعد واحد.

**ثانياً:** إذا كانت  $G_2 = G_2(q_\alpha, P_\alpha, t)$

الدالة  $G$  تعتمد على الإحداثي المعمم القديم وكمية الحركة الجديدة والزمن.

مما سبق نعلم أن :

$$dG_1 = \sum p_\alpha dq_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha - (\bar{H} - H)dt$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$dG_1 = \sum \dot{p}_\alpha dq_\alpha - d \sum P_\alpha Q_\alpha + \sum Q_\alpha dP_\alpha + (\bar{H} - H) \quad (8)$$

ومنها

$$d[G_1 + \sum P_\alpha Q_\alpha] = \sum p_\alpha dq_\alpha + \sum Q_\alpha dP_\alpha + (\bar{H} - H)dt \quad (9)$$

وحيث أن الطرف الأيمن تتواجد فيه  $dt, p_\alpha, dq_\alpha$  وأن  $G_2$  هي دالة في

المتغيرات  $t, p_\alpha, q_\alpha$  بذلك نستطيع وضع

$$G_2 = G_1 + \sum P_\alpha Q_\alpha \quad (10)$$

أي أن

$$G_2(q_\alpha, p_\alpha, t) = G_1(q_\alpha, Q_\alpha, t) + \sum P_\alpha Q_\alpha$$

والمعادلة (٩) تصبح

$$dG_2 = \sum p_\alpha dq_\alpha + \sum Q_\alpha dP_\alpha + (\bar{H} - H)dt \quad (11)$$

وحيث  $G_2 = G_2(p_\alpha, q_\alpha, t)$  فيكون

$$dG_2 = \sum \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum \frac{\partial Q_\alpha}{\partial P_\alpha} dP_\alpha + \frac{\partial G_2}{\partial t} dt \quad (12)$$

من المعادلة (١١)، (١٢) نحصل على

$$p_\alpha = \frac{\partial G_2}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial G_2}{\partial P_\alpha}, \quad \bar{H} - H = \frac{\partial G_2}{\partial t} \quad (13)$$

بحل المعادلات  $p_\alpha = \frac{\partial G_2}{\partial q_\alpha}$  نحصل على  $p_\alpha$  كدالة في  $q_\alpha, P_\alpha, t$  ثم نعوض فيالمعادلات  $Q_\alpha = \frac{\partial G_2}{\partial P_\alpha}$  نوجد  $Q_\alpha$  كدالة في  $P_\alpha, q_\alpha, t$  ونحصل بذلك على معادلاتالتحويل ثم نوجد  $\bar{H}$  بالتعويض في  $\bar{H} = H + \frac{\partial G_2}{\partial t}$ **ثالثاً:** إذا كانت  $G_3 = G_3(p_\alpha, Q_\alpha, t)$ الدالة  $G$  دالة في كمية الحركة المعممة القديمة  $p_\alpha$ ، والإحداثي المعممالجديد  $Q_\alpha$  والزمن  $t$ .

البرهان :

$$\therefore dG_1 = \sum p_\alpha dq_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha - (\bar{H} - H)dt$$

والتي يمكن وضعها كالآتي :

$$dG_1 = d \sum p_\alpha dq_\alpha - \sum q_\alpha dP_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha + (\bar{H} - H)dt$$

إذا

$$d[dG_1 + \sum p_\alpha q_\alpha] = \sum P_\alpha dQ_\alpha - \sum q_\alpha dp_\alpha + (\bar{H} - H)dt$$

وبنفس الطريقة السابقة في  $G_2$  نكتب

$$G_2(p_\alpha, Q_\alpha, t) = G_1(q_\alpha, Q_\alpha, t) - \sum p_\alpha q_\alpha$$

أي أن

$$dG_3 - \sum q_\alpha dp_\alpha - \sum p_\alpha dQ_\alpha + (\bar{H} - H)dt$$

كذلك يكون لدينا

$$dG_3 = \sum \frac{\partial G_3}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \sum \frac{\partial G_3}{\partial Q_\alpha} dQ_\alpha + \frac{\partial G_3}{\partial t} dt$$

ومن ثم تصبح المعادلات التي بمقتضاها يتولد التحويل القانوني كالآتي

$$q_\alpha = -\frac{\partial G_3}{\partial p_\alpha}, \quad P_\alpha = \frac{\partial G_3}{\partial Q_\alpha}, \quad \bar{H} - H = \frac{\partial G_3}{\partial t}$$

وبحل المعادلة  $q_\alpha = -\frac{\partial G_3}{\partial p_\alpha}$  نوجد  $Q_\alpha = Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$  وبالتعويض في  $P_\alpha = \frac{\partial G_3}{\partial Q_\alpha}$ نحصل على  $P_\alpha = P_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$  ومن ثم بالتعويض في  $\bar{H} - H = \frac{\partial G_3}{\partial t}$  نحصل كذلك على معادلات التحويل القانوني والمعادلة الخاصة بـ  $\bar{H}$ .رابعاً: إذا كانت  $G_4 = G_4(p_\alpha, P_\alpha, t)$ 

في هذه الحالة يكون

$$q_\alpha = -\frac{\partial G_4}{\partial p_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial G_4}{\partial P_\alpha}, \quad \frac{\partial G_4}{\partial t} = \bar{H} - H$$

ويحل معادلة  $q_\alpha$  نوجد  $p_\alpha = p_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$  ثم نعوض في معادلة  $Q_\alpha$  لإيجادها كدالة في  $Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$  ثم نوجد  $\bar{H}$ .

### البرهان :

إذا كانت الدالة المولدة للتحويل على الصورة:

$$G_4 = G_4(p_s, P_s, t) \quad (1)$$

مما سبق:

$$dG = \sum_s (p_s dq_s - P_s dQ_s) + (\bar{H} - H)dt \quad (2)$$

لكن التفاضل الكلي (أو التام) للمعادلة (١) يعطى:

$$dG_4 = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial G_4}{\partial p_s} dp_s + \frac{\partial G_4}{\partial P_s} dP_s \right) + \frac{\partial G_4}{\partial t} dt \quad (3)$$

وبالنظر إلى (٢)، (٣) نجد أنه تصعب المقارنة على هذا النحو لذا نضيف للطرف الأيسر

في المعادلة (٢) الحدين  $q_s dp_s$  ،  $Q_s dP_s$  ثم نطرحهما فنجد أن:

$$dG = \sum_{s=1}^n \{ (p_s dq_s + q_s dp_s - q_s dp_s) + (-P_s dQ_s - Q_s dP_s + Q_s dP_s) \} + (\bar{H} - H)dt$$

والتي يمكن إعادة صياغتها على النحو التالي:

$$dG = \sum_{s=1}^n \{ d(p_s q_s) - d(P_s Q_s) - q_s dp_s + Q_s dP_s \} + (K - H)dt$$

أو:

$$d[G + \sum_{s=1}^n (P_s Q_s - p_s q_s)] = \sum_{s=1}^n (-q_s dp_s + Q_s dP_s) \quad (4)$$

$$+ (\bar{H} - H)dt$$

بمقارنة (٣)، (٤) نجد أن:

$$q_s = -\frac{\partial G_4}{\partial p_s}, Q_s = -\frac{\partial G_4}{\partial P_s},$$

$$\frac{\partial G_4}{\partial t} = \bar{H} - H, G_4 = G + \sum_{s=1}^n (P_s Q_s - p_s q_s)$$

٣-٥ شرط التحويلات القانونية (التحويلات الفيصلية أو تحويلات التماس)

التحويل:

$$P_\alpha = P_\alpha(p_s, q_s, t), Q_\alpha = Q_\alpha(p_s, q_s, t)$$

يكون قانونيا إذا كان:

$$\sum_{\alpha} (p_{\alpha} dq_{\alpha} - P_{\alpha} dQ_{\alpha})$$

هو تفاضل تام في المتغيرات  $q_s, p_s$  أي أنه:

$$\sum_{\alpha} (p_{\alpha} dq_{\alpha} - P_{\alpha} dQ_{\alpha}) = dW(q_{\alpha}, p_{\alpha}) \quad (1)$$

وتسمى الدالة  $(W)$  بالدالة المميزة للتحويل Characteristic Function. ويجب ملاحظة أن الدالة  $W$  مع أنها يمكن أن تعتمد على الزمن  $t$  فإننا لم نبين ذلك في المتغيرات التي تعتمد عليها وذلك لأن المقصود أن يكون الطرف الأيسر في المعادلة هو تفاضل تام بالنسبة للمتغيرات  $q_{\alpha}, p_{\alpha}$  فقط وعلى ذلك فإن:

$$dW = \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial W}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} \right) \quad (2)$$

ومن هاتين المعادلتين (١)، (٢) يمكن إيجاد المشتقات الجزئية للدالة  $W$  بالنسبة للمتغيرات القانونية القديمة أي الكميات:

$$\frac{\partial W}{\partial q_{\alpha}}, \frac{\partial W}{\partial p_{\alpha}}$$

وبإجراء التكاملات عليها يمكن إيجاد الدالة المميزة للتحويل  $W$ .

### ملخص ما سبق

#### اختبار قانونية التحويل

(١) إذا كانت معادلات هاملتون تحتفظ بصورتها المعتادة إذا كتبت بدلالة الإحداثيات القانونية الجديدة كما كانت مكتوبة بدلالة الإحداثيات القانونية القديمة (أي لا تغيرية) تحت تأثير التحويل القانوني.

(٢) إذا كان التكامل السطحي  $\sum_{\alpha=1}^n \int_S dq_{\alpha} dp_{\alpha}$  (لا تغيري) تحت تأثير التحويل

القانوني (السطح  $S$  مرسوم في فراغ الطور ويقع في مقطع من هذا الفراغ تتعين فيه النقط من قيم الإحداثيات القانونية  $(p_{\alpha}, q_{\alpha})$  نظرية بوانكاريه.

(٣) عندما تكون الدالة المولدة هي إحدى الدوال الآتية والتي تكون معادلات التحويل بين الإحداثيات القديمة  $p, q$  والجديدة  $P, Q$  لا يظهر فيها الزمن صراحة:

$$G_1 = G_1(q, Q), \quad G_2 = G_2(q, P) = G_1 + P Q$$

$$G_3 = G_1 - p q = G_3(p, Q), \quad G_4 = G_4(p, P) = G_1 + P Q - p q$$

وهذا يعني انه يمكن الحصول على أي دالة مولدة إذا علمت أي الدوال المولدة وفي هذه الحالة أيضا نلاحظ أن  $\bar{H} = H$ .

فلكي يكون التحويل قانونياً يجب أن تتواجد دالة مولدة له أي يتحقق إحدى العلاقات التالية :

$$p = \frac{\partial G_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial q}$$

$$p = \frac{\partial G_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial G_2}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial q}$$

$$q = -\frac{\partial G_3}{\partial p}, \quad p = -\frac{\partial G_3}{\partial Q} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial P} = -\frac{\partial Q}{\partial q}$$

$$q = -\frac{\partial G_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial G_4}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{\partial Q}{\partial p}$$

بأسلوب آخر لكي يكون التحويل قانونياً يجب أن تكون أي صيغة من الصيغ الآتية تفاضلاً تاماً

$$\begin{aligned} p \, dq - P \, dQ, & \quad p \, dq + Q \, dP \\ -q \, dP - P \, dQ, & \quad -q \, dP - Q \, dP \end{aligned}$$

هناك شروط أخرى تُبنى على أقواس بواسون وأقواس لاجرانج لاختبار قانونية التحويل وسنذكرها فيما بعد.

### ٣-٥ أمثلة

#### مثال ١:

أثبت أن التحويل

$$p = \sqrt{2P\omega} \cos Q, \quad q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \sin Q \quad (1)$$

تحويل قانوني وإذا كانت دالة هاملتون للمتذبذب التوافقي تعطى في الصورة  $H = \frac{p^2}{2m} \frac{\partial \mathcal{L}_v}{\partial q_\alpha}$  حيث  $\omega = \sqrt{m\lambda}$  اكتب هذه الدالة بدلالة الإحداثيات الجديدة  $P, Q$  وبين أن  $Q$  إحداثي مهمل (دوري). أوجد معادلات هاملتون وأثبت أنها تمثل حركة متذبذب توافقي.

#### الحل

إحدى الطرق لإثبات التحويل المعطى (١) هو تحويل قانوني هو إثبات أن  $p \, dq - P \, dQ$  تمثل تفاضل تام ومن ثم نحاول حساب ذلك

$$\begin{aligned} p \, dq - P \, dQ &= \sqrt{2P\omega} \cos Q \left\{ \frac{\sin Q}{\sqrt{2P\omega}} dP + \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \cos Q dQ \right\} \\ &\quad - P \, dQ \\ &= \frac{1}{2} \sin 2Q dP + (2 \cos^2 Q - 1) P dQ \\ &= \frac{1}{2} \sin 2Q dP + (\cos 2Q) P dQ \end{aligned}$$

$$= d \left( \frac{1}{2} P \sin 2 Q \right)$$

وهذا يثبت أن التحويل قانوني.

المطلوب الثاني إيجاد H بدلالة الإحداثيات P, Q

$$\therefore H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \lambda q^2$$

نستخدم التحويلات (١) في التعويض في H نحصل على

$$H = \frac{\lambda}{\omega} P \cos^2 Q + \frac{\lambda}{\omega} P \sin^2 Q = \frac{\lambda}{\omega} P$$

وهنا نلاحظ أن H لا تحتوي على Q صراحة فإن Q هو إحداثي مهمل (دوري).

وتصبح معادلات هاملتون

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{const.}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\lambda}{\omega} = \alpha, \text{ where } \alpha/s \text{ const.}$$

$$\Rightarrow Q = \alpha t + \varepsilon$$

ومن ثم فإن

$$q = A \sin (\alpha t + \varepsilon)$$

حيث A ثابت  $(= \sqrt{2P/\omega})$  وهذا الحل واضح أنه دالة دورية وهو الحل للمتذبذب التوافقي.

مثال ٢:

أوجد التحويل القانوني الذي له الدالة المولدة  $G = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$  حيث  $\omega, m$  ثوابت. ثم استخدم هذا التحويل لحل مسألة المتذبذب التوافقي الخطي الذي كتلته  $m\omega^2$  تمثل ثابت القوة المؤثرة عليه حيث  $\omega = 2\pi\nu$  حيث  $\nu$  التردد للحركة. نفرض أنه بدأ الحركة من السكون على بعد  $a$  من مركز القوة.

## الحل

واضح أن  $G$  دالة في  $q, Q$  ومن ثم

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = m \omega q \cot Q ; P = -\frac{\partial G}{\partial Q} = \frac{m \omega}{2} q^2 \operatorname{cosec}^2 Q \quad (1)$$

من المعادلات (١) نحصل على

$$Q = \cot^{-1} \frac{p}{m \omega q} , P = \frac{p^2 + m^2 \omega^2 q^2}{2 m \omega} \quad (2)$$

والتحويل العكسي للمعادلات (٢)

$$q = \frac{\sqrt{2 P}}{m \omega} \sin Q , p = \sqrt{2 P m \omega} \cos Q \quad (3)$$

واضح من المعادلات (٢)، (٣) أن التحويل قانوني لأن

$$p dq - P dQ$$

تمثل تفاضل تام وهذا سهل إثباته.

لحل مسألة المتذبذب التوافقي نوجد  $H$  بدلالة الإحداثيات القديمة  $p, q$  فيكون

$$H = \frac{p^2}{2 m} + \frac{m \omega^2}{2} q^2 = \text{const.} = E$$

حيث أن  $G$  لا تحتوي على الزمن صراحة فيكون

$$\bar{H} = H$$

فيكون صياغة المسألة باستخدام التحويل القانوني بدلالة الإحداثيات الجديدة  $P, Q$  هي :

$$\bar{H} = \frac{1}{2} m \left( \sqrt{2 P m \omega} \cos Q \right)^2 + \frac{m \omega^2}{2} \left[ \sqrt{\frac{2 P}{m \omega}} \sin Q \right]^2$$

$$\bar{H} = \omega P = E$$

واضح دالة هاملتون الجديدة في صورة بسيطة وفيها الإحداثي المعمم  $Q$  إحداثي مهمل

كما أن كمية الحركة الجديدة  $P$  تظل ثابتة أثناء الحركة لأن  $P = \frac{E}{\omega} = \text{const.}$

معادلات هاملتون في الإحداثيات الجديدة تكون

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \omega = \text{const.}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

$$Q = \omega t + \varepsilon, \quad P = \text{const.}$$

ولكن

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varepsilon)$$

وعند  $t = 0$  كانت  $q = a$ ،  $p = 0$ ، ويكون  $E = \frac{m\omega^2 a^2}{2}$

$$\varepsilon = Q = \cot^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$= a \cos \omega t$$

$$p dq = P dQ = P dq - (q \cot p) \frac{q}{\sin p} (q \cos p dp - \sin p dq) / q^2$$

$$= (p + \cot p) dq - q \cot^2 p dq$$

$$= L dq + M dp$$

مثال ٣:

أوجد التحويل القانوني الذي دالته المولدة هي

$$G = \frac{1}{2} \left[ -Q \sqrt{q - Q^2} \right] + q \cos^{-1} \frac{Q}{\sqrt{q}}$$

الحل : نلاحظ أن  $G(q, Q) = G$  فيكون

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{Q}{2\sqrt{q - Q^2}} + \cos^{-1} \frac{Q}{\sqrt{q}} + \frac{Q}{2\sqrt{q - Q^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{Q}{\sqrt{q}}$$

$$-P = \frac{\partial G}{\partial Q} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{q + Q^2 + Q^2 - q}{\sqrt{q - Q^2}} \right]$$

$$\therefore P = \sqrt{q - Q^2}$$

$$Q = \sqrt{q} \cos 2p, \quad P = \sqrt{q} \sin 2p \quad \text{إذن}$$

وهو التحويل القانوني المطلوب.

**مثال ٤:**

أثبت أن التحويل:  $Q = \ln[(\sin p)/q]$  ,  $P = q \cot p$  قانوني وأوجد الدالة المولدة له  $G$ .

**الحل**

نحاول إثبات أن  $p \, dq - P \, dQ$  يمثل تفاضل تام والذي يثبت أن التحويل قانوني كالآتي :

$$p \, dq - P \, dQ = p \, dq - (q \cot p) \frac{q}{\sin p} (q \cos p \, dp - \sin p \, dq)/q^2$$

$$= (p + \cot p) \, dq - q \cot^2 p \, dp$$

$$= L \, dq + M \, dp$$

$$L = p \cot p, \quad M = -q \cot^2 p \quad \text{حيث}$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\partial M}{\partial q} \quad \text{فإذا كان}$$

حصلنا على المطلوب وهو واضح من الآتي

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 1 - \operatorname{cosec}^2 p = -\cot^2 p$$

$$\frac{\partial M}{\partial q} = -\cot^2 p$$

يتضح مما سبق أن التحويل قانوني.

لإيجاد دالة التحويل Q :

$$G(p, P) = G \text{ هنا}$$

$$\frac{\partial G}{\partial p} = -q = -P \tan p$$

$$G = P \ln \cos p + f(P)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p} = Q = \ln \frac{\cos p}{P} = \ln \cos p - \ln P$$

$$G = P \ln \cos p - \left[ P \ln p - \int dP \right]$$

$$= P \ln \cos p - P \ln P + P + F(p)$$

نختار  $F(p) = 0$  ،  $F(p) = P(1 - \ln P)$  إذا

$$G = P \ln \cos p + P(1 - \ln P)$$

مثال ٥:

أوجد قيم  $a, b$  حتى يكون التحويل الآتي قانوني

$$Q = q^a \cos b p, \quad P = q^a \sin b p$$

ثم أوجد الدالة المولدة  $G$ .

الحل

نلاحظ أن  $G$  دالة في  $P, Q$  من ثم بتطبيق الشرط

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

إذن

$$(a q^{a-1} \cos b p)(q^a \cos b p) + (q^a b \sin b p)(a q^{a-1} \sin b p) = 1$$

$$\therefore a b q^{2a-1} = 1$$

$$2a - 1 = 0, \quad a b = 1$$

واضح أن

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 2$$

ومنها

ويكون التحويل القانوني هو

$$Q = \sqrt{q} \cos 2p, \quad P = \sqrt{q} \sin 2p$$

لايجاد الدالة G

$$\frac{\partial G}{\partial p} = -q = -Q^2 \sec^2 2p \Rightarrow G = -\frac{Q^2}{2} \tan 2p + f(Q)$$

$$\frac{\partial G}{\partial Q} = -p = -Q \tan 2p \Rightarrow G = -\frac{Q}{2} \tan 2p + g(p)$$

باختيار  $f = g = 0$  فيكون

$$G = -\frac{Q^2}{2} \tan 2p$$

مثال ٦:

أثبت أن التحويل:  $Q = \tan^{-1}(\frac{q}{p}), P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$  يكون قانونيا.

الحل

حسب الشرط السابق يكون التحويل قانونيا إذا كان:

$$\sum_{\alpha} (p_{\alpha} dq_{\alpha} - P_{\alpha} dQ_{\alpha}) \quad (1)$$

تفاضلا تاما.

$$\therefore dQ = \frac{\partial Q}{\partial q} dq + \frac{\partial Q}{\partial p} dp = \frac{pdq - qdp}{[1 + (\frac{q}{p})^2 p^2]}$$

إذن الشرط (١) يمكن كتابته على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} pdq - \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \frac{pdq - qdp}{[1 + (\frac{q}{p})^2 p^2]} \\ = pdq - \frac{1}{2}pdq + \frac{1}{2}qdp \\ = \frac{1}{2}pdq + \frac{1}{2}qdp \end{aligned}$$

$$= d\left(\frac{1}{2}pq\right) \text{ وهذا تفاضل تام}$$

إذن التحويل السابق هو تحويلًا قانونيًا.

### ملاحظة هامة:

إذا كانت:

$$Q = Q(p, q) \quad , \quad P = P(p, q)$$

وكانت دالتي هاملتون على الصورة:

$$H = H(p, q) \quad , \quad K = K(p, q)$$

فإن معادلات هاملتون هي:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad , \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

فإنه يمكن وضع الشرط التالي لكي يكون التحويل السابق قانونيًا:

$$J = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = 1$$

وتعميم هذه الملاحظة صحيح وتنص على أن الجاكوبيان للتحويل القانوني يكون مساويًا للوحدة.

مثال ٧:

استخدم الشرط السابق في إثبات أن التحويل التالي:

$$\text{تحويلًا قانونيًا} \quad Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right) \quad , \quad P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial p} = p, \frac{\partial P}{\partial q} = q$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\ln(-\frac{q}{p^2})}{1 + \frac{q^2}{p^2}} = \frac{-q}{p^2 + q^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\ln(\frac{1}{p})}{1 + \frac{q^2}{p^2}} = \frac{p}{p^2 + q^2}$$

شرط أن يكون التحويل قانونيا هو أن:  $J = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)}$  وهذا يعطى من:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q \\ -\frac{q}{p^2 + q^2} & \frac{p}{p^2 + q^2} \end{vmatrix} = \frac{p^2}{p^2 + q^2} + \frac{q^2}{p^2 + q^2} = \frac{p^2 + q^2}{p^2 + q^2} = 1$$

إذن التحويل قانونيا.

**مثال ٨:**

أثبت أن التحويل التالي:

$$P = q \cot \alpha p, \quad Q = \ln\left(\frac{1}{q} \sin p\right)$$

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial p} = -q \operatorname{cosec}^2 p, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \cot \alpha p$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\frac{1}{q} \cos p}{\frac{1}{q} \sin p} = \cot an p$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\sin p(-\frac{1}{q^2})}{\frac{1}{q} \sin p} = -\frac{1}{q}$$

شرط أن يكون التحويل قانونيا هو أن يكون الجاكوبيان  $J = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,Q)} = 1$  وهذا يعطى:

$$J = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(p,Q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -q \operatorname{cosec}^2 p & \cot an p \\ \cot an p & -\frac{1}{q} \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{cosec}^2 p - \cot an^2 p = 1$$

إذا التحويل هو تحويلا قانونيا.

**مثال ٩:**

أثبت أن علاقة التحويل التالية:  $P = \sqrt{q} \sin^2 p, Q = \sqrt{q} \cos^2 p$  قانونية.

**الحل**

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 2\sqrt{q} \cos^2 p, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{q}} \sin^2 p$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -2\sqrt{q} \sin^2 p, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{q}} \cos^2 p$$

$$J = \begin{vmatrix} 2\sqrt{q}\cos^2 p & \frac{1}{2\sqrt{q}}\sin^2 p \\ -2\sqrt{q}\sin^2 p & \frac{1}{2\sqrt{q}}\cos^2 p \end{vmatrix} = \cos^2 2p + \sin^2 p = 1$$

مثال ١٠:

أثبت أن علاقة التحويل التالية قانونية:

$$P = \sqrt{2q}e^{-t} \sin p, Q = \sqrt{2q}e^t \cos p$$

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \sqrt{2q}e^{-t} \cos p, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{2q}}e^{-t} \sin p$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\sqrt{2q}e^t \sin p, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{e^t}{\sqrt{2q}} \cos p$$

$$J = \begin{vmatrix} \sqrt{2q}e^{-t} \cos p & \frac{1}{\sqrt{2q}}e^{-t} \sin p \\ -\sqrt{2q}e^t \sin p & \frac{e^t}{\sqrt{2q}} \cos p \end{vmatrix} = \cos^2 p + \sin^2 p = 1$$

مثال ١١:

أثبت أن التحويل التالي قانوني:

$$P = (p^2 + \omega^2 q^2) / 2\omega, \quad Q = \cot \tan^{-1}(p) / \omega q$$

الحل

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{p}{\omega}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \omega q$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{\omega q}{\omega^2 q^2 + p^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\omega p}{\omega^2 q^2 + p^2}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{p}{\omega} & \omega q \\ \frac{\omega q}{\omega^2 q^2 + p^2} & \frac{\omega p}{\omega^2 q^2 + p^2} \end{vmatrix} = \frac{p^2 + \omega^2 q}{\omega^2 q^2 + p^2} = 1$$

## مثال ١٢:

إذا كانت معادلات التحويل هي:

$$Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p), \quad P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p)\sqrt{q} \sin p$$

فأثبت أن التحويل يكون قانونياً، وأن الدالة المولدة للتحويل هي:

$$G_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p$$

## الحل

يمكن كتابة معادلتى التحويل على الصورة التالية:

$$Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p), \quad P = 2\sqrt{q} \sin p + q \sin^2 p$$

ويمكن إثبات أن هذا التحويل قانونياً وإذا كان الجاكوبيان يساوى الوحدة أي أن:

$$J = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = 1$$

لذا نحسب الآن عناصر المحدد كالتالي:

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 2\sqrt{q} \cos p + 2q \cos 2p$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\sin p}{\sqrt{q}} + \sin^2 p, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{-\sqrt{q} \sin p}{1 + \sqrt{q} \cos p}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{q}} \cos p$$

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{vmatrix} 2\sqrt{q} \csc p + 2q \cos^2 p & \frac{\sin p}{\sqrt{q}} + \sin^2 p \\ -\sqrt{q} \sin p & \frac{1}{2\sqrt{q}} \csc p \\ \frac{1}{1 + \sqrt{q} \csc p} & \frac{1}{1 + \sqrt{q} \csc p} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\cos^2 p + \sqrt{q} \csc p \cos^2 p + \sin^2 p + \sqrt{q} \sin p \sin^2 p}{1 + \sqrt{q} \csc p} \\
 &= \frac{\cos^2 p + \sin^2 p + \sqrt{q} [\csc p (1 - 2 \sin^2 p)]}{1 + \sqrt{q} \csc p} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{q} (\sin p (2 \sin p \csc p))}{1 + \sqrt{q} \csc p} \\
 &= \frac{1 + \sqrt{q} \csc p - 2\sqrt{q} \sin^2 p \csc p + 2\sqrt{q} \sin^2 p \csc p}{1 + \sqrt{q} \csc p} = 1
 \end{aligned}$$

ولإيجاد الدالة المولدة نتبع الآتي: من معادلة التحويل الأولى:

$$\begin{aligned}
 e^Q &= 1 + \sqrt{q} \csc p \Rightarrow e^Q - 1 = \sqrt{q} \csc p \\
 \therefore q^{\frac{1}{2}} &= (e^Q - 1) \csc p \quad (1)
 \end{aligned}$$

بالتعويض من (1) في معادلة التحويل الثانية نجد أن:

$$\begin{aligned}
 P &= 2 \frac{(e^Q - 1)}{\csc p} \sin p + \frac{(e^Q - 1)}{\cos^2 p} 2 \sin p \csc p \\
 P &= 2(e^Q - 1)(e^Q) \tan p \quad (2)
 \end{aligned}$$

وهذا الشكل لكمية الحركة المعممة في الإحداثيات الجديدة يقترح علينا دالة مولدة من النوع الثالث  $G_3(p, Q)$  وفي هذه الحالة نجد:

$$P = -\frac{\partial G_3}{\partial Q} = 2e^Q (e^Q - 1) \tan p$$

بالتكامل جزئياً بالنسبة إلى  $Q$  نجد أن:

$$G_3 = -2 \int e^Q (e^Q - 1) \tan p dQ = (e^Q - 1)^2 \tan p + f(p)$$

و  $f(p)$  هي دالة اختيارية يمكن اختيارها صفراً وتكون:

$$G_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p$$

مثال ١٣:

إذا كان  $Q = \tan^{-1}(p/q)$  ،  $P = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$  فأوجد التحويل العكسي. أثبت أنه تحويل قانوني وذلك بأكثر من طريقة وأوجد أيضاً الصور المختلفة للدالة المولدة.

الحل

$$\therefore q = p \tan Q$$

$$\therefore 2P = p^2 (1 + \tan^2 Q) = p^2 \sec^2 Q$$

$$\therefore p^2 = 2P \cos^2 Q \Rightarrow p = \sqrt{2P} \cos Q$$

$\therefore$  التحويل العكسي هو :

$$\begin{cases} q = \sqrt{2P} \cos Q \cdot \tan Q = \sqrt{2P} \sin Q , \\ p = \sqrt{2P} \cos Q \end{cases}$$

١. سوف نثبت الآن أن  $p d q - P d Q$  تفاضل تام لكي يكون التحويل قانوني.

$$dQ = \frac{1}{(1 + q^2/p^2)} \frac{p d q - q d p}{p^2} = \frac{p d q - q d p}{q^2 + p^2}$$

$$p d q - P d Q = p d q - \frac{1}{2}(q^2 + p^2) \cdot \frac{p d q - q d p}{q^2 + p^2}$$

$$= \frac{1}{2} (p d q + q d p) = d(pq/2)$$

أي تفاضل تام. وحيث أن الشرط السابق مستنتج من المعادلات التي بمقتضاها

تولد  $G_1$  التحويل القانوني. إذن

$$G_1 = \frac{pq}{2}$$

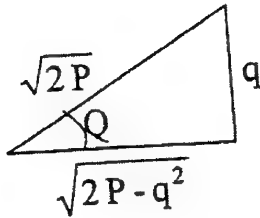
ولكي تكون  $G_1$  هي الدالة الصحيحة يجب أن تكون دالة في  $q, Q$  أي  
 $G_1 \equiv G_1(q, Q)$  وبالتعويض عن  $p$  من رأس المسألة نجد أن :

$$G_1 = \frac{q^2}{2 \tan Q}$$

$$G_2 = G_1 + P Q = \frac{q^2}{2 \tan Q} + P Q \quad ٢. \text{ حيث أن:}$$

وللحصول على  $G_2$  الصحيحة يجب أن  
تكون  $G_2 \equiv G_2(q, P)$  نعوض عن  $Q$

$$\text{حيث: } Q = \sin^{-1} \frac{q}{\sqrt{2P}}$$



$$\therefore G_2 = \frac{q \sqrt{2P - q^2}}{2} + P \sin^{-1} \frac{q}{\sqrt{2P}}$$

٢. لإيجاد  $G_3$  :

$$G_3 = G_1 - p q = \frac{p q}{2} - p q = -\frac{1}{2} p q$$

وحيث أن  $G_3 \equiv G_3(p, Q)$  إذن نحذف  $q$  أي نوجدها بدلالة  $p, Q$  حيث أن  
 $= p \tan Q$

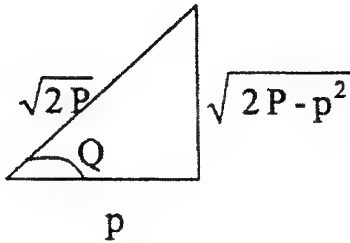
$$\therefore G_3 = -\frac{1}{2} p^2 \tan Q$$

٤. لإيجاد دالة التحويل التي تعتمد على  $p, P$  والتي تسمى  $G_4$  نعلم أن

$$G_4 = G_1 - p q + P Q = \frac{p q}{2} - p q + P Q = -\frac{1}{2} p q + P Q$$

وبحذف  $q, Q$  وإيجادهم بدلالة  $P, p$

$$q = p \tan Q = p \cdot \frac{\sqrt{2P - p^2}}{p} = \sqrt{2P - p^2}$$



$$\therefore G_4 = -\frac{1}{2} p \sqrt{2P - p^2}$$

$$+ P \tan^{-1} \frac{\sqrt{2P - p^2}}{p}$$

يترك للطالب إثبات قانونية التحويل

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = 1 \text{ من}$$

مثال ١٤:

$$G = -\frac{p^2}{2} \tan Q$$

أوجد التحويل القانوني الذي دالته المولدة هي:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \quad (\text{ii})$$

$$H = m g q \quad (\text{i}) \quad \text{وأوجد } H \text{ إذا كانت:}$$

الحل

$G$  تعتمد على  $p, Q$  وعلى ذلك فإن  $G \equiv G_3$

$$q = -\frac{\partial G_3}{\partial p} ; P = -\frac{\partial G_3}{\partial Q}$$

$$\therefore q = p \tan Q ; P = \frac{p^2}{2} \sec^2 Q = \frac{p^2}{2} (1 + \tan^2 Q)$$

$$\therefore Q = \tan^{-1} \left( \frac{q}{p} \right) ; P = \frac{p^2}{2} \left( 1 + \frac{q^2}{p^2} \right) = \frac{1}{2} (q^2 + p^2)$$

وهو نفس التحويل القانوني في المثال السابق. أما التحويل العكسي فهو

$$q = \sqrt{2P} \sin Q, \quad p = \sqrt{2P} \cos Q$$

وحيث أن  $G$  لا تعتمد على  $t$  صراحة إذن  $H = H$  وإذا كانت

$$(i) \quad H = m g q$$

$$\therefore \sqrt{2P} \sin Q$$

$$(ii) \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

$$\therefore H = \frac{P}{m} \cos^2 Q + m \omega^2 P \sin^2 Q$$

مثال ١٥:

أثبت أن التحويل الآتي هو تحويل قانوني

$$Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p) \quad ; \quad P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p) \sqrt{q} \sin p$$

ثم أوجد  $G_3$

### الحل

نثبت أن  $p \, dq - P \, dQ$  هو تفاضل تام لكي يكون التحويل قانوني

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial q} dq + \frac{\partial Q}{\partial p} dp = \frac{\frac{1}{2\sqrt{q}} \cos p \, dq - \sqrt{q} \sin p \, dp}{1 + \sqrt{q} \cos p}$$

$$P \, dQ = \sin p \cos p \, dq - 2q \sin^2 p \, dp$$

$$\therefore p \, dq - P \, dQ = \left(p - \frac{1}{2} \sin 2p\right) dq + 2q \sin^2 p \, dp$$

$\equiv$

$$\frac{\partial R}{\partial p} = 1 - \cos 2p = 2 \sin^2 p \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial q} = 2 \sin^2 p$$

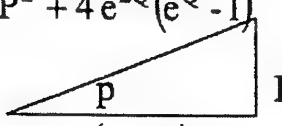
$$\therefore \frac{\partial R}{\partial p} = \frac{\partial N}{\partial q}$$

وعلى ذلك فإن  $p \, dq - P \, dQ$  هو تفاضل تام أي أن التحويل قانوني.

لإيجاد  $G_3 \equiv G_3(p, Q)$  نستخدم

$$q = -\frac{\partial G_3}{\partial p} \quad , \quad P = -\frac{\partial G_3}{\partial Q}$$

ونوجد  $q, P$  كدوال في  $p, Q$

$$\sqrt{p^2 + 4e^{2Q}(e^Q - 1)^2}$$


$$2e^Q(e^Q - 1)$$

$$q = \left(\frac{e^Q - 1}{\cos p}\right)^2 \quad ,$$

$$P = 2e^Q(e^Q - 1) \tan p$$

$$\therefore \frac{\partial G_3}{\partial p} = -(e^Q - 1)^2 \sec^2 p$$

$$\therefore G_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p + F(Q) \quad (*)$$

كذلك

$$\frac{\partial G_3}{\partial Q} = -2(e^{2Q} - e^Q) \tan p$$

$$\begin{aligned} \therefore G_3 &= -2\left(\frac{1}{2}e^{2Q} - e^Q\right) \tan p + C(p) \\ &= -(e^Q - 1)^2 \tan p + \tan p + C(p) \end{aligned} \quad (*)'$$

حيث  $F(Q)$  هي دالة في  $Q$  فقط،  $C(p)$  هي دالة في  $p$  فقط.بمقارنة  $(*)'$ ،  $(*)$  نجد أن :

$$C(p) = -\tan p ; \quad F(Q) = 0$$

$$\therefore G_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p$$

## مثال ١٦:

اثبت قانونية التحويل في المثال السابق عن طريق إثبات أن  $\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = 1$  أوجد أيضاً

التحويل العكسي.

الحل

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\cos p}{2\sqrt{q}(1 + \sqrt{q} \cos p)} \quad , \quad (i)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{-\sqrt{q} \sin p}{1 + \sqrt{q} \cos p} \quad , \quad (ii)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{(1 + 2\sqrt{q} \cos p) \sin p}{\sqrt{q}} \quad , \quad (iii)$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 2\sqrt{q} (\cos p + \sqrt{q} \cos 2p) \quad (iv)$$

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

وبالتعويض من (i)، (ii)، (iii) نجد أن :  $\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = 1$

لإيجاد التحويل العكسي : وجدنا أن :

$$q = \frac{(e^Q - 1)^2}{\cos^2 p}, P = 2 e^Q (e^Q - 1) \tan p \quad (1)$$

$$\therefore Q = \frac{(e^Q - 1)^2 [P^2 + 4 e^{2Q} (e^Q - 1)^2]}{4 e^{2Q} (e^Q - 1)^2} = \frac{1}{4} P^2 e^{-2Q} + (e^Q - 1)^2$$

$$\tan p = \frac{P}{2 e^Q (e^Q - 1)} \Rightarrow p = \tan^{-1} \frac{P}{2 e^Q (e^Q - 1)} \quad \text{كذلك}$$

مثال ١٧ :

أوجد قيم  $\alpha, \beta$  حتى يكون التحويل الآتي قانونياً

$$Q = q^\alpha \cos \beta p, P = q^\alpha \sin \beta p$$

ومن ثم أوجد الدالة المولدة  $G_3$ .

الحل

لكي يكون التحويل قانونياً يجب أن يكون

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

نفرض أن التحويل قانوني :

$$\therefore (\alpha q^{\alpha-1} \cos \beta p)(q^\alpha \beta \cos \beta p) + (q^\alpha \beta \sin \beta p)(\alpha q^{\alpha-1} \sin \beta p) = 1$$

$$\therefore \beta \alpha q^{2\alpha-1} = 1 \quad \therefore 2\alpha - 1 = 0$$

ومنها  $\alpha = \frac{1}{2}$  ،  $\beta = 2$  ويكون التحويل هو

$$Q = \sqrt{q} \cos 2p, \quad P = \sqrt{q} \sin 2p$$

لايجاد  $G_3$  نعلم أن

$$q = -\frac{\partial G_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial G_3}{\partial Q}$$

$$\therefore q = Q^2 \sec^2 2p = -\frac{\partial G_3}{\partial p}$$

بالتكامل بالنسبة إلى  $p$

$$\therefore G_3 = -\frac{1}{2} Q^2 \tan 2p + f(Q) \quad (1)$$

كذلك

$$P = -\frac{\partial G_3}{\partial Q} = \sqrt{q} \sin 2p = Q \tan 2p$$

بالتكامل بالنسبة إلى  $Q$

$$\therefore G_3 = -\frac{1}{2} Q^2 \tan 2p + C(p) \quad (2)$$

بمقارنة (1)، (2) نجد أن :

$$f(Q) = 0, \quad C(p) = 0 \Rightarrow G_3 = -\frac{1}{2} Q^2 \tan 2p$$

**مثال ١٨ :**

أوجد التحويل القانوني الذي دالته المولدة هي

$$G = \frac{1}{2} [-Q \sqrt{q - Q^2} + q \cos^{-1} \frac{Q}{\sqrt{q}}]$$

**الحل**

واضح أن  $G$  من النوع الأول  $G_1$  التي تعتمد على  $q, Q$

$$\begin{aligned} \therefore p &= \frac{\partial G_1}{\partial q}, & P &= -\frac{\partial G_1}{\partial Q} \\ \therefore p &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{Q}{2\sqrt{q-Q^2}} + \cos^{-1} \frac{Q}{\sqrt{q}} - \frac{q}{\sqrt{1-\frac{Q^2}{q}}} \left( -\frac{Q}{2q^{3/2}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{Q}{\sqrt{q}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2} \left[ -Q \frac{-2Q}{2\sqrt{q-Q^2}} - \sqrt{q-Q^2} - q \frac{1}{\sqrt{1-\frac{Q^2}{q}}} \times \frac{1}{\sqrt{q}} \right] \\ &= \sqrt{q-Q^2} \end{aligned} \quad (2)$$

من (1)، (2) نجد أن :

$$Q = \sqrt{q} \cos 2p, \quad P = \sqrt{q} \sin 2p$$

وهو نفس التحويل القانوني في المثال السابق.

### مثال ١٩ :

اثبت أن التحويل الآتي هو تحويل قانوني :  $Q = \ln[(\sin p)/q]$  ,  $P = q \cot p$   
وأوجد الدالة المولدة  $G_4$

### الحل

نثبت أن  $p \, dq - P \, dQ$  تفاضل تام

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{1}{(\sin p)/q} \frac{q \cos p \, dp - \sin p \, dq}{q^2} \\ p \, dq - P \, dQ &= p \, dq - (q \cot p) \cdot \frac{q \cos p \, dp - \sin p \, dq}{q \sin p} \\ &= (p + \cot p) \, dq - q \cot^2 p \, dp \\ &= R \, dq + N \, dp \\ \frac{\partial R}{\partial p} &= 1 - \operatorname{cosec}^2 p = -\cot^2 p, \quad \frac{\partial N}{\partial q} = -\cot^2 p \end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن  $p \, d q - P \, d Q$  تفاضل تام أي أن التحويل قانوني.

وكان يمكن إثبات أن  $\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = 1$  وسوف يترك ذلك للطالب.

كذلك  $G_4 \equiv G_4(p, P)$

$$\therefore q = -\frac{\partial G_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial G_4}{\partial P}$$

وحيث أن  $P = q \cot p$  إذن  $q = P \tan p$

$$\therefore -\frac{\partial G_4}{\partial p} = P \tan p$$

وبالتكامل بالنسبة إلى  $p$

$$\therefore G_4 = P \ln \cos p + f(P) \quad (1)$$

كذلك حيث أن  $Q = \ln \frac{\sin p}{q}$  إذن

$$Q = \ln \frac{\sin p}{P \tan p} = \ln \frac{\cos p}{P} = \ln \cos p - \ln P$$

$$\therefore \frac{\partial G_4}{\partial P} = \ln \cos p - \ln P$$

وبالتكامل بالنسبة إلى  $P$

$$\therefore G_4 = P \ln \cos p - P \ln P + P + C(p) \quad (2)$$

وبمقارنة (1)، (2) نجد أن :

$$f(P) = P(1 - \ln P), \quad C(p) = 0$$

$$\therefore G_4 = P \ln \cos p + P(1 - \ln P)$$

مثال ٢٠:

أوجد التحويل القانوني الذي دالته المولدة هي:  $G = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$  حيث  $\omega$ ،  $m$  ثوابت. ومن ثم استخدم هذا التحويل لحل مسألة التذبذب التوافقي الخطي الذي كتلته  $m$  وثابت القوة المؤثرة عليه  $m\omega^2$  بفرض أنه بدأ الحركة من السكون من نقطة على بعد  $a$  من مركز الذبذبة.

الحلواضح أن  $G \equiv G_1(q, Q)$ 

$$\therefore p = \frac{\partial G_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q ; \quad P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} q^2 \operatorname{cosec}^2 Q$$

$$P = \frac{m\omega}{2} q^2 \left( \frac{p^2 + m^2 \omega^2 q^2}{m^2 \omega^2 q^2} \right) = \frac{p^2 + m^2 \omega^2 q^2}{2m\omega}$$

وعلى ذلك فإن التحويل القانوني هو

$$Q = \cot^{-1} \frac{p}{m\omega q}, \quad P = \frac{p^2 + m^2 \omega^2 q^2}{2m\omega}$$

أما التحويل العكسي فهو

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

نحل الآن مسألة المتذبذب التوافقي الخطي ونضعها رياضياً في الإحداثيات القديمة  $q, p$ 

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \text{const.} = E \quad \text{فيكون:}$$

ثم نضع المسألة رياضياً في الإحداثيات الجديدة  $Q, P$  باستخدام التحويل القانوني العكسي مع ملاحظة أن  $H = H$  حيث أن  $G$  لا تحتوي على الزمن  $t$  صراحة

$$H = \frac{1}{2m} \left[ \sqrt{2m\omega P} \cos Q \right]^2 + \frac{m\omega^2}{2} \left[ \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \right]^2$$

$$= \omega P = E$$

واضح أن دالة هاملتون في الإحداثيات الجديدة بسيطة ولا تحتوي على الإحداثي المعمم  $Q$  أي أنه إحداثي مهمل لذلك فإن كمية الحركة المعممة في الإحداثيات الجديدة  $P$

$$P = \frac{E}{\omega} = \text{const.} \quad \text{تظل ثابتة أثناء الحركة:}$$

بكتابة معادلات هاملتون في الإحداثيات الجديدة

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q},$$

$$\therefore \dot{Q} = \omega = \text{const.} \quad ; \quad \dot{P} = 0$$

$$\therefore Q = \omega t + \alpha \quad ; \quad P = \text{const.} = \frac{E}{\omega}$$

وحيث أن :

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad \therefore q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

حيث  $\alpha$  مقدار ثابت يتعين من الشروط الابتدائية وهي:

$$E = \frac{m\omega^2 a^2}{2}, \quad p = 0, \quad q = a \quad \text{عند } t = 0 \text{ فإن}$$

$$\therefore a = a \sin \alpha \quad \text{or} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore q = a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = a \cos \omega t$$

مثال ٢١:

$$Q = \sqrt{2 \frac{q}{k}} \cos p, \quad P = \sqrt{2 q k} \sin p \quad \text{اثبت أن التحويل}$$

الحل

نثبت أن  $p \, d q - P \, d Q$  هو تفاضل تام

$$d Q = -\sqrt{2 \frac{q}{k}} \sin p \, d p + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{k}} q^{-\frac{1}{2}} \cos p \, d q$$

$$P \, d Q = \sqrt{2 q k} \sin p - \left[ -\sqrt{2 \frac{q}{k}} \sin p \, d p + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{k}} q^{-\frac{1}{2}} \cos p \, d q \right]$$

$$= \sin p \cos p \, d q - 2 q \sin^2 p \, d p$$

$$p \, d q - P \, d Q = (p - \sin p \cos p) \, d q + 2 q \sin^2 p \, d p$$

$$= X \, d q + Y \, d p$$

$$\frac{\partial X}{\partial p} = 1 - \cos 2 p = 2 \sin^2 p, \quad \frac{\partial Y}{\partial q} = 2 \sin^2 p$$

$$\therefore \frac{\partial X}{\partial p} = \frac{\partial Y}{\partial q}$$

$\therefore$  (p d q - P d Q) تفاضل تام وعلى ذلك فإن التحويل يكون قانوني.

Hamilton-Jacobi Equation

ثانياً: معادلة هاميلتون-جاكوبي:

من النتائج المفيدة للتحويلات القانونية هي إيجاد حلول لبعض المسائل الميكانيكية وذلك باعتبار أنه إذا أمكن التحويل إلى إحداثيات جديدة مستترة (دورية أو مهمة) تكون معادلات الحركة لها قابلة للحل بسهولة.

ومن الاعتبارات المفيدة أنه إذا أمكن إيجاد تحويل قانوني (أو فيصلي) بحيث يكون فيه دالة هاميلتون الجديدة  $\bar{H}$  مساوية للصفر. فإننا نرى من دالة التحويل  $G_2(q, p, t)$  بالتحديد سوف تعطينا كل من كميات الحركة القديمة والإحداثيات الجديدة على الصورة:

$$p_s = \frac{\partial G_2}{\partial q_s}, \quad Q_s = \frac{\partial G_2}{\partial P_s}, \quad \bar{H} - H = \frac{\partial G_2}{\partial t} \quad (1)$$

أي أن باستخدام التحويل القانوني السابق نستطيع إيجاد المتغيرات الجديدة  $P, Q$  ثوابت وذلك عندما  $\bar{H} = 0$  وبالتالي نستطيع تحديد حركة المجموعة. والخطوات تتوقف على إيجاد الدالة المولدة للتحويل الصحيحة.

من المعادلة (١) نرى بعد وضع  $\bar{H} = 0$  أن الدالة المولدة للتحويل تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial G_2}{\partial t} + H(q_\alpha, p_\alpha, t) = 0$$

وحيث أننا هنا نتناول حالة بعينها ألا وهي عندما  $\bar{H} = 0$  ،  $P_\alpha = \text{const.} = \beta_\alpha$  فإننا سوف نرمز للدالة  $G_2$  التي لها هذه الخاصية بالرمز  $S(q_\alpha, P_\alpha, t)$  أو  $S(q_\alpha, \text{const.}, t)$  حيث تكون

$$P_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \quad , \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta_\alpha}$$

حيث  $\bar{H} = 0$

$$\frac{\partial S(q_\alpha, p_\alpha, t)}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0 \quad (4)$$

تسمى هذه المعادلة بمعادلة هاملتون جاكوبي وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى في المتغيرات  $(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$  وعددهم  $(n+1)$  وحلها يعطينا الدالة  $S(q_\alpha, P_\alpha, t)$  والتي تسمى بدالة هاملتون الرئيسية Hamilton's principle function وهي الدالة التي تولد هذا التحويل القانوني الفريد الذي فيه  $\bar{H}(Q_\alpha, P_\alpha, t) = 0$  أي الذي يحول الإحداثيات  $(q_\alpha, p_\alpha)$  إلى الإحداثيات القانونية الجديدة الثابتة  $(Q_\alpha, P_\alpha)$ . (حيث  $q_\alpha, \beta_\alpha$  مقدار ثابت) والتي تتلاشى ومن العلاقة  $Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta_\alpha} = \gamma_\alpha$  نحصل على

المواضع القديمة ومن  $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}$  نحصل على  $p_\alpha$  ومن ثم تكون المجموعة الديناميكية قد تحددت تحديداً تاماً.

٥-٥ كيف تؤدي معادلة هاملتون - جاكوبي إلى حل المسألة الديناميكية :

حيث أن :

$$P_\alpha = \text{const.} = \beta_\alpha \quad \text{say} \quad (5)$$

نجد دالة التحويل  $S$  تأخذ الصورة

$$S \equiv S(q_1, q_2, \dots, q_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t) \quad (6)$$

وكما ذكرنا أنه بحل معادلة هاملتون - جاكوبي (4) يمكن معرفة  $S$  ومنها نحصل على كميات الحركة المعممة القديمة  $p_\alpha$  من

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

ومن العلاقة

$$Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial S}{\partial \beta_\alpha} \quad (7)$$

نحصل على الإحداثيات المعممة القديمة  $q_\alpha$  كدوال في  $\beta_\alpha, \gamma_\alpha, t$  وبذلك تكون حركة المجموعة الديناميكية قد تحددت تماماً.

٦-٥ حالة خاصة عندما تكون دالة هاملتون القديمة لا تحتوي على الزمن  $t$  صراحة

عندما تكون  $H \equiv H(p_\alpha, q_\alpha)$  أي لا تعتمد على الزمن  $t$  صراحة أي في حالة المجموعات المحافضة فإن  $H = E = \text{const.}$  حيث  $E$  هي الطاقة الكلية للمجموعة تصبح معادلة هاملتون جاكوبي على الصورة :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \quad (8)$$

وبالتكامل بالنسبة للزمن  $t$

$$\therefore S(q_\alpha, \beta_\alpha, t) = -E t + W(q_\alpha, \beta_\alpha) \quad (9)$$

الدالة  $W \equiv W(q_\alpha, \beta_\alpha)$  تسمى بدالة هاملتون المميزة Hamilton's characteristic وهي لا تعتمد على الزمن  $t$  صراحة وهي دالة مولدة من النوع الثاني لتحويل قانوني غير الذي تولده الدالة  $S$ . معادلة هاملتون جاكوبي التي تحققها الدالة  $W$  هي

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = E \quad (10)$$

وبحل هذه المعادلة نستطيع إيجاد الدالة  $W(q_\alpha, \beta_\alpha)$  وبمقتضى المعادلات

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} ; Q_\alpha \equiv \gamma_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta_\alpha} = \frac{\partial (W - E t)}{\partial \beta_\alpha} \quad (11)$$

نستطيع حل المعادلة الديناميكية بنفس الأسلوب السابق  
يلاحظ أن  $E$  يعتبر أحد الثوابت التي تحتويها الدالة  $S$  (معادلة (9)) وسوف نختار هذا الثابت مساوياً للثابت  $\beta_1$  أي أن :

$$E = \beta_1$$

وتصبح المعادلة (9) على الصورة :

$$S = W - \beta_1 t \quad (9)'$$

وتصبح (10) على الصورة

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = \beta_1 \quad (10)'$$

هذه المعادلة تسمى معادلة هاملتون - جاكوبي.

## ❖ ملاحظات :

واضح أن المعادلة  $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, t) = 0$  هي معادلة تفاضلية جزئية في الدالة الغير معلومة  $S$  وهي دالة في المتغيرات  $(q, t)$  فقط. وفي الحقيقة أن هذه الدالة تحتوى على عدد  $n$  من الثوابت  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  هم كميات الحركة الجديدة  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .  
وحيث أن دالة هاملتون الجديدة  $\bar{H}$  تساوى الصفر وكذلك فإن الإحداثيات الجديدة  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  تكون ثوابت ولتكن  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  وبذلك يكون لدينا:

$$P_\alpha = \beta_\alpha, \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta_\alpha} = \gamma_\alpha \quad (3)$$

ولإيجاد دالة التحويل الجديدة القانونية  $G$  فإنه يمكن استخدام طريقة فصل المتغيرات ولنفرض الصورة التالية للدالة  $G$ .

$$G = G_1(q_1) + G_2(q_2) + \dots + G^*(t)$$

$$G^*(t) = -E t \quad \text{فإن } H = E \text{ ونجد أن: } \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$H(q, \frac{\partial G}{\partial q}) = E \quad \text{وتصبح معادلة هاملتون - جاكوبي على الصورة:}$$

وتكون دالة هاملتون - جاكوبي في هذه الحالة هي:

$$G = G_1(q_1) + G_2(q_2) + \dots + G_n(q_n)$$

وسوف نعتبر فيما يلي المثالين التاليين:

## مثال ١:

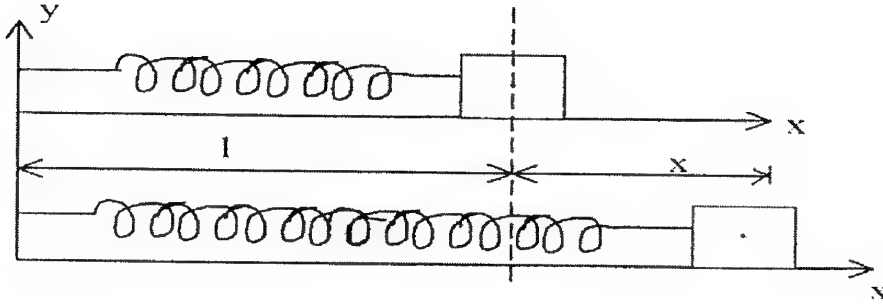
طبق معادلة هاملتون - جاكوبي على حركة المهتز التوافقي البسيط ذو الكتلة  $m$  وثابت المرونة  $k$  وأثبت أن إحداثي الموضع  $q$  للمهتز التوافقي يعطى بالعلاقة:

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \sin \left[ \sqrt{\frac{k}{m}} (t + \beta) \right]$$

حيث  $\beta$  ثابت،  $\alpha$  هي الطاقة الكلية،  $t$  هو الزمن.

الحل

شكل (٦-١)



طاقة الموضع و طاقة الحركة للمتذبذب هما:

$$V = -\frac{1}{2}kq^2, \quad T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \quad (1)$$

دالة لاگرانج تصبح:

$$L = T - V = L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad (2)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad (3)$$

دالة هاميلتون:

$$H = p\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad (4)$$

$$H = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = H(q, p) \quad (5)$$

معادلة هاميلتون-جاكوبي تصبح:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} + H(q, \frac{\partial G}{\partial q}) &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\frac{\partial G}{\partial q})^2 + \frac{1}{2}kq^2 &= 0 \end{aligned}$$

نفرض الآن الصورة التالية لدالة التحويل:

$$\begin{aligned} G(q, t) &= G_1(q) + G_2(t) \\ \frac{1}{2m}(\frac{\partial G_1}{\partial q})^2 + \frac{1}{2}kq^2 &= -\frac{dG_2}{dt} = \alpha \end{aligned}$$

ومن الواضح أننا اعتبرنا طرفي المعادلة السابقة تساوي مقدارا ثابتا  $\alpha$  حيث أن كل طرف لا يحتوي على المتغير في الطرف الآخر ومن الشق الأخير للمعادلة نجد أن:

$$G_2(t) = -\alpha t$$

$$\left(\frac{dG_1}{dq}\right)^2 = 2m\alpha - mkq^2 \quad \text{وينتج إذن:}$$

$$dG_1 = \pm \sqrt{2m\alpha - mkq^2} dq$$

$$G_1 = \pm \int \sqrt{2m\alpha - mkq^2} dq$$

$$G = + \int \sqrt{2m(\alpha - \frac{1}{2}kq^2)} dq - \alpha t$$

حيث أننا ذكرنا أننا نبحث عن  $G$  بحيث يكون  $K = 0$  في هذه الحالة تكون  $P = \alpha$  أي أنها تمثل إحداثيات مستترة. وباعتبار  $\alpha$  هو إحداثي كمية الحركة المعممة الجديدة

$$P = \alpha \quad \text{أي أن:}$$

فيكون  $Q$  هو إحداثي الموضع المعمم الجديد حيث :

$$Q = \frac{\partial G}{\partial P} = \frac{\partial G}{\partial \alpha}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى  $\alpha$  نجد أن:

$$\therefore Q = \pm \sqrt{\frac{2m}{4}} \int \frac{dq}{\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}kq^2}} - t = \text{ثابت} = \beta$$

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}kq^2}} = t + \beta$$

$$\pm \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{\frac{2}{k}} \sin^{-1} \sqrt{\frac{k}{2\alpha}} q = t + \beta$$

$$q = \pm \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} (t + \beta) \right)$$

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = \pm \sqrt{2m\alpha - mkq^2} = \pm \sqrt{2m\alpha} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} (t + \beta) \right)$$

**مثال ٢:** (مسألة كبلر لجسيم موجود في مجال قوة مركزية).

أكتب معادلة هاملتون- جاكوبي لحركة لنقطة مادية تتحرك تحت تأثير

• قوة مركزية بدلالة الإحداثيات القطبية  $r, \theta$  لها دالة الجهد  $V(r)$

### الحل

من الواضح أننا نستخدم في هذه المسألة الإحداثيات القطبية  $r, \theta$  حيث تكون طاقة الحركة على الصورة:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

ودالة لاجرانج تصبح:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$$

نحسب الآن كمية الحركة ثم دالة هاملتون كالتالي:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$$

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) + V(r)$$

$$= \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2) + V(r) \quad (1)$$

$$\therefore H = H(r, \theta, p_r, p_\theta)$$

إذن معادلة هاملتون - جاكوبي تصبح:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H(r, \theta, \frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial \theta}) = 0$$

والتي تصبح:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial G}{\partial \theta} \right)^2 \right\} + V(r) = 0 \quad (2)$$

وبفرض أن:

$$G = s_1(r) + s_2(\theta) + s_3(t) \quad (3)$$

إذن المعادلة (٢) تصبح:

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{ds_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{ds_2}{d\theta} \right)^2 \right\} + V(r) = -\frac{ds_3}{dt}$$

وبوضع كلا من الطرفين يساوى  $\beta_3$  أي أن:

$$\frac{ds_3}{dt} = \beta_3$$

$$\therefore \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{ds_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{ds_2}{d\theta} \right)^2 \right\} + V(r) = \beta_3 \quad (5)$$

ومن تكامل (٤) ينتج أن:

$$s_3 = -\beta_3 t$$

بضرب طرفي المعادلة (٥) في  $2mr^2$  نحصل على:

$$\left( \frac{ds_2}{d\theta} \right)^2 = r^2 \left\{ 2m\beta_3 - 2mr^2 V(r) - \left( \frac{ds_1}{dr} \right)^2 \right\}$$

وحيث أن أحد طرفي المعادلة يعتمد على  $\theta$  فقط بينما الطرف الآخر يعتمد على  $r$  فقط، إذن كل طرف يساوي مقدار ثابت ويكون:

$$\frac{ds_2}{d\theta} = \beta_2 \Rightarrow s_2 = \beta_2 \theta$$

وكذلك نجد أن:

$$r^2 \left\{ 2m\beta_3 - 2mV(r) - \left( \frac{ds_1}{dr} \right)^2 \right\} = \beta_2^2$$

فإذا كانت القوة مركزية وتتناسب عكسيا مع مربع المسافة أي أن:

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

$$\therefore 2m\beta_3 + \frac{2mk}{r} - \left( \frac{ds_1}{dr} \right)^2 = \frac{\beta_2^2}{r^2}$$

أو

$$\frac{ds_1}{dr} = \sqrt{2m\beta_3 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}$$

$$\therefore s_1 = \int \sqrt{2m\beta_3 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr.$$

$$\therefore G = \int \sqrt{2m\beta_3 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr + \beta_2 \theta - \beta_3 t.$$

ويتطابق  $\beta_3, \beta_2$  مع كميتي الحركة الجديتين  $P_\theta, P_r$  على الترتيب نحصل على:

$$Q_r = \frac{\partial G}{\partial \beta_2} = \frac{\partial}{\partial \beta_2} \int \sqrt{2m\beta_3 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr + \theta = \gamma_1$$

$$Q_\theta = \frac{\partial G}{\partial \beta_3} = \frac{\partial}{\partial \beta_3} \int \sqrt{2m\beta_3 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr - t = \gamma_2$$

حيث  $Q_\theta, Q_r$  تابعان مثل  $\gamma_2, \gamma_1$ .

$$\therefore \int \frac{\beta_2 dr}{r^2 \sqrt{2m\beta_3 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}} = \theta - \gamma_1 \quad (1)$$

$$\int \frac{m dr}{r^2 \sqrt{2m\beta_3 + \frac{2mk}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}} = t + \gamma_2 \quad (2)$$

بوضع  $r = \frac{1}{u}$  ومنها  $dr = -\frac{1}{u^2}$

$$\therefore \int \frac{u^2 \beta_2 (-\frac{du}{u^2})}{\sqrt{2m\beta_3 + 2mku - \beta_2^2 u^2}} = - \int \frac{\beta_2 du}{\sqrt{2m\beta_3 + 2mku - \beta_2^2 u^2}} = \theta - \gamma_1$$

$$\therefore \int \frac{\beta_2 du}{\sqrt{(2m\beta_3 + \frac{m^2 k^2}{\beta_2^2}) - (\beta_2 u - \frac{mk}{\beta_2})^2}} = \theta - \gamma_1$$

$$\therefore -\sin^{-1} \frac{\beta_2 u - \frac{mk}{\beta_2}}{\sqrt{2m\beta_3 + \frac{m^2 k^2}{\beta_2^2}}} = \theta - \gamma_1$$

$$\therefore -\frac{\beta_2^2 u - mk}{\sqrt{2m\beta_3\beta_2^2 + m^2 k^2}} = \sin(\theta - \gamma_1) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \gamma_1\right)$$

$$\therefore \frac{-\frac{\beta_2^2 u}{mk} + 1}{\sqrt{\frac{2\beta_2^2\beta_3}{mk^2} + 1}} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \gamma_1\right)$$

$$\therefore -\frac{\beta_2^2 u}{mk} = \left(\sqrt{\frac{2\beta_2^2\beta_3}{mk^2} + 1}\right) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \gamma_1\right) - 1$$

$$\therefore \frac{\beta_2^2 u}{mk} = \left(1 - \sqrt{\frac{2\beta_2^2\beta_3}{mk^2} + 1}\right) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \gamma_1\right)$$

$$\frac{1}{r} = u = \frac{mk}{\beta_2^2} \left\{1 - \sqrt{\frac{2\beta_2^2\beta_3}{mk^2} + 1}\right\} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \gamma_1\right)$$

$$\therefore r = \frac{\frac{\beta_2^2}{mk}}{\left(1 - \sqrt{\frac{2\beta_2^2\beta_3}{mk^2} + 1}\right) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \gamma_1\right)}$$

الثابت  $\beta_3$  هو عبارة عن الطاقة.

فإذا كانت  $E = \beta_3 < 0$  يكون المدار قطعاً ناقصاً.  
 وإذا كانت  $E = \beta_3 = 0$  يكون المدار قطعاً مكافئاً.  
 وإذا كان  $E = \beta_3 > 0$  يكون المدار قطعاً زائداً.  
 وبتكامل المعادلة (٢) فإنها تعطى المسار كدالة في الزمن  $t$  وبذلك أمكن استنتاج معادلة المسار عن طريق استخدام معادلة هاملتون- جاكوبي.

### مثال ٣:

أكتب معادلة هاملتون- جاكوبي لحركة لنقطة مادية تتحرك تحت تأثير قوة مركزية بدلالة الإحداثيات القطبية  $r, \theta$  لها دالة الجهد  $V = -\frac{k \cos \theta}{r}$ .

### الحل

من الواضح أننا نستخدم في هذه المسألة الإحداثيات القطبية  $r, \theta$  حيث تكون طاقة الحركة على الصورة:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

ودالة لاجرانج تصبح:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k \cos \theta}{r}$$

نحسب الآن كمية الحركة ثم دالة هاملتون كالتالي:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) - \frac{k \cos \theta}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2) - \frac{k \cos \theta}{r^2}$$

$$\therefore H = H(r, \theta, p_r, p_\theta)$$

وتكون معادلة هاميلتون - جاكوبي هي:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H(r, \theta, \frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial \theta}) = 0$$

والتي تصبح:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial G}{\partial \theta} \right)^2 \right\} - \frac{k \cos \theta}{r^2} = 0$$

وهذه هي معادلة هاميلتون - جاكوبي المطلوبة.

$$G = s_1(r) + s_2(\theta) + f(t)$$

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{ds_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{ds_2}{d\theta} \right)^2 \right\} - \frac{k \cos \theta}{r^2} = -\frac{df}{dt} = \beta$$

$$\Rightarrow f(t) = -\beta t$$

$$\frac{r^2}{2m} \left( \frac{ds_1}{dr} \right)^2 - \beta r^2 = k \cos \theta - \frac{1}{2m} \left( \frac{ds_2}{d\theta} \right)^2 = r$$

وبهذا يتم فصل المتغيرات ونحصل على المعادلتين:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{ds_1}{dr} \right)^2 = \beta + \frac{\gamma}{r^2}, \quad \frac{1}{2m} \left( \frac{ds_2}{d\theta} \right)^2 = k \cos \theta - \gamma$$

ومن ناحية المبدأ إذا تم حل المعادلتين فإننا نحصل على  $s_1(r)$  ،  $s_2(\theta)$  وبالتالي دالة التحويل :

$$G = s_1(r) + s_2(\theta) + f(t)$$

## مثال ٤:

سقط جسيم كتلته  $m$  من السكون من ارتفاع  $h$  من سطح الأرض تحت تأثير وزنه عين الحركة بطريقة هاملتون - جاكوبي

## الحل

نأخذ الإحداثي المعمم  $q$  هي بعد الجسيم عند أي لحظة عن الأرض تكون سرعته المعممة هي  $\dot{q}$  وهي سرعة الجسيم الحقيقية كمية الحركة المعممة  $p$  تساوي  $m \dot{q}$  دالة هاملتون تعطى من:

$$H = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + m g q = \frac{p^2}{2m} + m g q = E = \text{const.}$$

ولكن  $p = \frac{\partial S}{\partial q}$  فتكون معادلة هاملتون - جاكوبي التي تحققها  $S$  هي

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m g q = 0 \quad \text{where} \quad \bar{H} = 0$$

حيث  $P = \text{const.} = E$  وكذلك  $S = S(q, p, t) = S(q, E, t)$

ومعادلة هاملتون - جاكوبي التي تحققها الدالة  $W$  هي

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + m g q = E \quad (\bar{H} = E)$$

لأن  $W = W(q, E)$ ,  $p = \frac{\partial W}{\partial q}$

أيضاً  $W(q, E) - E t = S(q, E, t) =$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m(E - m g q)}^{1/2}$$

$$W = -\frac{2}{3g} \sqrt{\frac{2}{m}} (E - m g q)^{3/2}$$

$$S = -\frac{2}{3g} \sqrt{\frac{2}{m}} (E - mgq)^{3/2} - Et$$

الإحداثي المعمم الذي تولده الدالة S يساوى  $\text{const.} = \beta = \frac{\partial S}{\partial E}$

الإحداثي المعمم الذي تولده الدالة W ولكن  $\frac{\partial W}{\partial E} = W$  و  $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t$

$$\beta = -\frac{1}{g} \sqrt{\frac{2}{m}} (E - mgq)^{1/2} - t \quad \text{إذا}$$

وعندما  $p = mv = 0$  ,  $v = 0$  ,  $q = h$  ,  $t = 0$

$$\beta = 0, \quad E = mg$$

عند أي زمن  $t$  وعند أي موضع نحصل على:  $p = mv = m\sqrt{2g} (h - q)^{1/2}$   
أي  $v = -\sqrt{2g} (h - q)^{1/2}$

$$q = h - 1/2(gt^2) \quad \text{ومنها} \quad -\sqrt{2g} (h - q)^{1/2} - t = 0 \quad \text{أيضا}$$

نكون إذا قد عينا السرعة والموضع عند أي لحظة  $t$ .

بالنسبة للدالة S:

$$u = \infty, \quad v = 0, \quad q = h, \quad t = 0 \quad \text{عند}$$

$$u = \sqrt{\frac{gh}{2}}, \quad v = \sqrt{2gL}, \quad q = 0, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{عند}$$

أي أن السطح  $S = \text{const.}$  (وهو عبارة عن مستوي يبدأ حركته بسرعة تخيلية كبيرة جداً عندما كانت سرعة الجسيم تساوي الصفر. ويهبط معه مع تناقص سرعته وازدياد

سرعة الجسم إلى أن يصل الجسم إلى الأرض بسرعة  $v = \sqrt{2gh}$  فتصبح سرعة

$$u = \frac{v}{2} = \sqrt{(gh)/2} \text{ عندئذ } S = \text{const. السطح}$$

**مثال 5:** للمتذبذب التوافقي اكتب معادلة هاملتون ومن الحل صف الحركة.

### الحل

نفرض أن  $x = q$  هو الموضع (الإحداثي المعمم) فإن دالة الجهد تساوي  $\frac{1}{2}kq^2$  حيث  $k$  ثابت من ثم

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2, \quad L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \quad (1)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \dot{q} = \frac{p}{m} \quad (2)$$

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = p\dot{q} - \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2\right) \quad (3)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 \quad (4)$$

معادلة هاملتون جاكوبي تصبح

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = 0 \quad (5)$$

لحل المعادلة (5) نحاول فصل المتغيرات نفترض الحل في الصورة :

$$S = S_1(q) + S_2(t) \quad (6)$$

فنحصل على

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = -\frac{dS_2}{dt} \quad (7)$$

بمساواة كل طرف بالثابت  $\beta$  (لأن الطرفين متساويين والأيسر دالة في متغير والأيمن في متغير آخر) نحصل على

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dS_1}{dq} \right)^2 + \frac{1}{2} k q^2 = \beta, \quad \frac{dS_2}{dt} = -\beta \quad (8)$$

وحل المعادلات بحذف ثوابت التكامل تكون الحلول

$$S_1 = \int \sqrt{2m \left( \beta - \frac{1}{2} k q^2 \right)} dq \quad (9)$$

$$S_2 = -\beta t \quad (10)$$

بالتعويض في (6) نحصل على

$$S = \int \sqrt{2m \left( \beta - \frac{1}{2} k q^2 \right)} dq - \beta t \quad (11)$$

وبمساواة كمية الحركة  $p$  بالثابت  $\beta$  ينتج أن الموضع الجديد هو

$$Q = \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2} k q^2}} - t$$

وحيث أن  $Q = \text{const.} = \gamma$  فإن

$$\frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2} k q^2}} - t = \gamma$$

وبعد التكامل نحصل على

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \left( q \sqrt{\frac{k}{2\beta}} \right) = t + \gamma \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2\beta}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} (t + \gamma)$$

وهذا هو الحل الذي يصف الحركة لموضع الجسم والثابت  $\beta, \gamma$  تتعين من الشروط الابتدائية.

### مثال ٦:

باستخدام طريقة هاملتون - جاكوبي أوجد حركة نقطة مادية في مجال جذب مركزي يخضع لقانون التربيع العكسي ومسألة كبلر Kapler's problem

### الحل

الحركة مستوية وطاقة الوضع  $V = -\frac{\mu}{r}$  ، إذن معادلة لاجرانج ستكون:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{\mu}{r} \quad (1)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \quad (2)$$

دالة لاجرانج تصبح

$$L = \frac{1}{2m} [p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}] + \frac{\mu}{r} \quad (3)$$

إذا دالة هاملتون تصبح  $H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$

$$H = \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) - \frac{\mu}{r} \quad (4)$$

بوضع  $p_r = \frac{\partial S}{\partial r}$  ،  $p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}$  في (4) نحصل على

$$H = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} \quad (5)$$

وتصبح معادلة هاملتون - جاكوبي في الصورة

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} \quad (6)$$

لحل المعادلة (6) نستخدم فصل المتغيرات

$$S = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(t) \quad (7)$$

بالتعويض من (7) في (6) فنحصل على :

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} = - \frac{dS_3}{dt}$$

وبمساواة كل طرف بالثابت  $\beta_3$  ينتج أن

$$S_3 = -\beta_3 t \quad (8)$$

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} = \beta_3 \quad \text{وكذلك:}$$

$$\left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = p^2 \left[ 2m\beta_3 + \frac{2m\mu}{r} - \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 \right] \quad (9)$$

وبفصل المتغيرات ينتج أن

$$S_2 = \beta_2 \theta, \quad p^2 \left[ 2m\beta_3 + \frac{2m\mu}{r} - \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 \right] = \beta_2^2 \quad (10)$$

أي أن

$$\frac{dS_1}{dr} = \sqrt{2m\beta_3 + \frac{2\mu m}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}$$

$$\therefore S_1 = \int \sqrt{2 m \beta_3 + \frac{2 \mu m}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr \quad (11)$$

الحل سيكون

$$S = \int \sqrt{2 m \beta_3 + \frac{2 \mu m}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}} dr + \beta_2 \theta - \beta_3 t \quad (12)$$

بمساواة  $p_r, p_\theta$  بالثوابت  $\beta_2, \beta_3$  ينتج أن

$$Q_3 = \frac{\partial S}{\partial \beta_2} = \gamma_2, \quad Q_\theta = \frac{\partial S}{\partial \beta_3} = \gamma_3 \quad (13)$$

وبإجراء التفاضلات بالنسبة إلى  $\beta_3, \beta_2$  نحصل على

$$\int \frac{\beta_2 dr}{r^2 \sqrt{2 m \beta_3 + \frac{2 \mu m}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}} = \theta - \gamma_2 \quad (14)$$

$$\int \frac{m dr}{\sqrt{2 m \beta_3 + \frac{2 m \mu}{r} - \frac{\beta_2^2}{r^2}}} = t + \gamma_3 \quad (15)$$

وحل المعادلة (14) نحصل عليه بوضع  $r = \frac{1}{u}$  وبعد التكامل نحصل على

$$\text{الإحداثي المعمم الثابت الذي تولده } \beta = \frac{\partial S}{\partial E} = S \text{ ثابت}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = W \text{ الإحداثي المعمم الذي تولده الدالة}$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t \quad \text{نعلم أن}$$

$$\beta = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2}{m}} (E - m g q)^{1/2} - t \quad \text{إذن}$$

$$\therefore p = m v = 0, \quad v = 0, \quad q = h, \quad t = 0 \quad \text{عند}$$

عند أي زمن  $t$  وعند أي موضع نحصل على

$$p = m v = m \sqrt{2 g (h - q)^{1/2}}$$

أي أن

$$v = 2\sqrt{2g(h-q)} = \sqrt{\frac{2}{g}}(h-q)^{1/2} - t = 0 \Rightarrow g = h - \frac{1}{2}gt^2$$

وهذا هو الموضع عند الزمن  $t$ ، بالنسبة إلى الدالة  $S$

$$\begin{aligned} S &= -\frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}(mg)^{3/2}(h-q)^{3/2} - mgh t \\ &= -mgh\left[\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{g}}(h-g)^{3/2} + t\right] \end{aligned}$$

أي أن هناك مستوى أفقي يهبط مع هبوط الجسم معادلته هي

$$\frac{2\sqrt{2}}{3h\sqrt{g}}(h-g)^{3/2} + t = \text{const}$$

مقدار سرعة هبوط هذا المستوى يتعين من

$$\frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{g}}(h-g)^{1/2}\left(-\frac{dq}{dt}\right) + 1 = 0 \Rightarrow u = \frac{dq}{dt} = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{2}}$$

مثال ٧:

يتحرك جسيم بحيث أن دالة هاملتون له تعطى من  $H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{\mu}{q}$  حيث  $q$  هو الإحداثي المعمم،  $p$  كمية الحركة المعممة. ابحث الحركة باستخدام معادلة هاملتون جاكوبي.

الحل

حيث أن  $H = E = \text{const.}$  صراحة فيكون:

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} \quad \text{حيث } E \text{ هي الطاقة الكلية للجسيم وحيث أن:}$$

حيث  $W$  هي دالة هاملتون المميزة. إذن يمكن كتابة معادلة هاملتون جاكوبي في الصورة

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 - \frac{\mu}{q} = E \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2 \left( E + \frac{\mu}{q} \right)}$$

$$\therefore W = \int \sqrt{2 \left( E + \frac{\mu}{q} \right)} dq \quad \text{بالتكامل:}$$

$$S(q, E, t) = W(q, E) - Et \quad \text{دالة هاميلتون الرئيسية S هي:}$$

$$\therefore S(q, E, t) = \int \sqrt{2 \left( E + \frac{\mu}{q} \right)} dq - Et$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} \equiv \frac{\partial S}{\partial E} \equiv \gamma = \frac{\partial W}{\partial E} - t \quad \therefore \gamma + t = \frac{\partial W}{\partial E} = \int \frac{dq}{\sqrt{2 \left( E + \frac{\mu}{q} \right)}}$$

$$\frac{2\mu}{q} = 2E \cot^2 \theta \quad \text{بوضع}$$

$$\therefore \sqrt{2E + \frac{2\mu}{q}} = \sqrt{2E} \operatorname{cosec} \theta, \quad dq = \frac{2\mu}{E} \tan \theta \sec^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \gamma + t &= \int \frac{\frac{2\mu}{E} \tan \theta \sec^2 \theta}{\sqrt{2E} \operatorname{cosec} \theta} d\theta \\ &= \frac{2\mu}{E\sqrt{2E}} \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta = \frac{2\mu}{E\sqrt{2E}} I \end{aligned}$$

حث

$$\begin{aligned} I &\equiv \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta = \int \tan \theta (\sec \theta \tan \theta) d\theta \\ &= \int \tan \theta d(\sec \theta) \end{aligned}$$

بالتكامل بالتجزئي

$$\begin{aligned} \therefore I &= \tan \theta \sec \theta - \int \sec \theta \sec^2 \theta d\theta \\ &= \tan \theta \sec \theta - \int \sec \theta (1 + \tan^2 \theta) d\theta \\ &= \tan \theta \sec \theta - \int \sec \theta d\theta - I \end{aligned}$$

$$\therefore 2I = \tan \theta \sec \theta - \ln (\sec \theta + \tan \theta)$$

$$\therefore \gamma + t = \frac{2\mu}{E\sqrt{2E}} \cdot \frac{1}{2} [\tan \theta \sec \theta - \ln (\sec \theta \tan \theta)]$$

$$= \frac{\mu}{E\sqrt{2E}} \cdot \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{qE}{\mu}} \sqrt{1 + \frac{qE}{\mu}} - \ln \left( \sqrt{1 + \frac{qE}{\mu}} + \sqrt{\frac{qE}{\mu}} \right) \right]$$

وهي العلاقة بين الإحداثي  $q$  والزمن  $t$ . الثابت  $\gamma$ ،  $E \equiv \beta$  تتعين من الشروط الابتدائية إن وجدت.

## تمارين

- ١- استخدم مبدأ هاملتون لدراسة حركة البندول البسيط.
- ٢- حل مسألة المقذوف باستخدام مبدأ هاملتون.
- ٣- أثبت أن التحويل  $P = -q, Q = P$  يكون فيصليا.
- ٤- أثبت أن التحويل  $P = In \sin P, Q = q \tan P$  يكون فيصليا.
- ٥- (أ) أثبت أن دالة هاملتون للمذبذب التوافقي يمكن كتابتها على الصورة:
- $$H = \frac{1}{2} P^2 / m + \frac{1}{2} k q^2$$

(ب) أثبت أن التحويل:

$$q = \sqrt{\frac{P}{\sqrt{k}}} \sin Q, P = \sqrt{mP\sqrt{k}} \cos Q$$

- (ج) أكتب دالة هاملتون للجزء (أ) بدلالة  $Q, P$  وأثبت أن  $Q$  تكون درجة دورية
- (د) أدرس حركة المذبذب التوافقي باستخدام النتائج السابقة.
- ٦- أثبت أن الدالة المولدة التي تسبب التحويل الفيصلي في المسألة السابقة (ب) تكون:
- $$S = \sqrt{k} q^2 \cos Q$$
- ٧- أثبت أن نتيجة تحويلين فيصليين متعاقبين أو أكثر تكون أيضا فيصليه.

- ٨- استخدم معادلة هاملتون-جاكوبي في دراسة حركة جسيم يسقط رأسياً في مجال جاذبية منتظم.
- ٩- (أ) أوجد معادلة هاملتون-جاكوبي لحركة جسيم ينزلق إلى أسفل على مستوى مائل أملس زاويته  $\alpha$ .  
(ب) حل معادلة هاملتون-جاكوبي في (أ) ثم أوجد حركة الجسيم.
- ١٠- حل مسألة المقذوف الذي أطلق بسرعة  $v$  في اتجاه يصنع زاوية  $\alpha$  مع الأفقي مستخدماً طريقة هاملتون - جاكوبي.
- ١١- استخدم طريقة هاملتون-جاكوبي في وصف حركة وإيجاد تردد مذبذب توافقي في: أ- بعدين ب- ثلاثة أبعاد
- ١٢- استخدم طريقة هاملتون-جاكوبي لتحصل على الدالة المولدة في المسألة (١١) السابقة.

# الفصل السابع

أقواس بواسون ولاجرانج  
Poisson and Lagrang brackets

- \* أقواس لاجرانج
- \* أقواس بواسون
- \* خواص أقواس بواسون
- \* اختبار قانونية التحويل باستخدام
- أقواس بواسون ولاجرانج
- \* أمثلة وتمارين

## الفصل السابع

### أقواس بواسون ولاجرانج

Poisson and Lagrang brackets

#### أولاً: أقواس لاجرانج

علمنا أن الخاصية الأساسية للتحويل القانوني هي أن معادلات هاملتون تظل محتفظة بصورتها المعتادة أي لا تغيرية تحت تأثير التحويل القانوني ولكن هل توجد صيغ أخرى لا تغيرية تحت تأثير التحويل القانوني.

نعم وهو  $J = \iint_S \sum_{\alpha=1}^n dq_{\alpha} dp_{\alpha}$  لا تغيري تحت تأثير التحويل القانوني وهو تكامل سطحي تتعين فيه النقطة من قيم ما  $q_{\alpha}, p_{\alpha}$  (نظرية بوانكارية)

والتكامل السابق يمكن كتابته أيضاً بالنسبة لأي إحداثيات  $P_{\alpha} = P_{\alpha}(q_{\alpha}, p_{\alpha})$ ،

$$Q_{\alpha} = Q_{\alpha}(p_{\alpha}, q_{\alpha})$$

$$\iint_S \sum d q_{\alpha} d p_{\alpha} = \iint_S \sum d P d Q_{\alpha} \quad (1)$$

والذي يمكن كتابته في صورة جاكوبي

$$\iint_S \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})}{\partial(u, v)} du dv = \iint_S \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(Q_{\alpha}, P_{\alpha})}{\partial(u, v)} du dv \quad (2)$$

أي

$$\iint_S \sum \frac{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})}{\partial(u, v)} = \iint_S \sum \frac{\partial(Q_{\alpha}, P_{\alpha})}{\partial(u, v)} \quad (3)$$

والمحددات الجاكوبية لا تغيري تحت تأثير التحويل القانوني والذي يمكن كتابته في الصورة

$$\sum_{\alpha} \left( \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial v} - \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial v} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} \right) = \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial u} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial v} - \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial v} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial u} \right) \quad (4)$$

الطرف الأيسر من المعادلة (4) يسمى بقوس لاجرانج للكميتين  $u, v$  في الإحداثيات  $Q_{\alpha}, P_{\alpha}$  ويكتب بالشكل

$$\{u, v\}_{q,p} = \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial v} - \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial v} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} \right)$$

$$\{u, v\}_{Q,p} = \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial u} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial v} - \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial v} \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial u} \right) \quad \text{أو}$$

وحيث أن  $\{u, v\}_{q,p} = \{u, v\}_{Q,p}$  فسوف نهمل المكتوب أسفل الأقواس ويصبح قوس لاجرانج  $\{u, v\}$

وواضح من تعريف قوس لاجرانج أن :

$$\{q_{\alpha}, p_{\beta}\} = \delta_{\alpha\beta} \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (5)$$

$$\{u, v\} = -\{v, u\} \quad (6)$$

### ثانياً: أقواس بواسون

من الموضوعات والوسائل المفيدة جداً في الميكانيكا التحليلية هو ما يعرف بأقواس بواسون. والسبب في ذلك أنها تلعب دوراً هاماً في استنباط الصيغة القانونية لمعادلة الحركة ولأي اختيار للإحداثيات وكميات الحركة المعممة المستقلة. كذلك فإنها تربط بين الميكانيكا التحليلية وميكانيكا الكم وكيفية إدخال المؤثرات التفاضلية في ميكانيكا الكم بدلا من الكميات الطبيعية في الميكانيكا التحليلية.

تعريف أقواس بواسون: Def. of Piosson's Brakets

إذا كانت لدينا منظومة ميكانيكية يتحدد موضعها بمجموعة الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  ( $\alpha=1,2,\dots,n$ ) فإن أي كمية طبيعية  $f$  خاصة بهذه المنظومة سوف تعتمد على الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  وكميات الحركة المعممة  $p_\alpha$  وربما الزمن  $t$  أيضا، أي أن:

$$f = f(q_\alpha, p_\alpha, t) \quad (1)$$

وعلى ذلك معدل تغير هذه الدالة  $f$  بالنسبة للزمن يكون:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2)$$

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة حركة الدالة  $f$  حيث تعطينا تطور الدالة  $f$  مع الزمن وباستخدام معادلات هاملتون المستنتجة من قبل الصورة:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad , \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (3)$$

نجد أن المعادلة (٢) يمكن كتابتها على الصورة:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4)$$

وعادة تكتب هذه المعادلة على الصورة التالية:

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (5)$$

وتسمى الكمية  $[f, H]$  بقوس بواسون للدالتين  $f, H$  وهو:

$$[f, H] = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \quad (6)$$

وعموما يكون تعريف قوس بواسون لأي دالتين  $f, g$  على الصورة:

$$[f, g] = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \right) \quad (7)$$

وتأتى أهمية أقواس بواسون في التعرف على ما يسمى بتكاملات الحركة Integrals of motion وهذه هي ثوابت الحركة constant of motion إذا كانت الدالة  $f$  لا تعتمد صراحة على الزمن  $t$  أي أن  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  فيكون شرط ثبوت الدالة بالنسبة للزمن هو أن يتلاشى قوس بواسون لتلك الدالة  $f$  مع دالة هاملتون  $H$  هذا حيث أن:  $[f, H] = 0$  وكذلك  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  فإنه ينتج من المعادلة (٥) أن  $\frac{df}{dt} = 0$  وبهذا تصبح الدالة  $f$  من ثوابت الحركة.

### خواص أقواس بواسون:

إذا كانت  $f, g$  دالتان تعتمدان على الإحداثيات المعممة  $q_s$  وكميات الحركة المعممة  $p_s$  والزمن  $t$  فإن:

$$\begin{aligned} 1) [f, g] &= -[g, f] & 2) [f_1 + f_2, g] &= [f_1, g] + [f_2, g] \\ 3) [f, q_{\alpha}] &= -\frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} & 4) [f, p_{\alpha}] &= \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \end{aligned}$$

الإثبات:

$$1) [f, g] = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \right)$$

بتبديل الحد الأول مع الثاني في الطرف الأيمن نجد أن:

$$[f, g] = -\sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} \right)$$

$$= - \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \right)$$

$$= -[g, f]$$

$$2) [f_1 + f_2, g] = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial(f_1 + f_2)}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial(f_1 + f_2)}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \right)$$

$$[f_1 + f_2, g] = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f_2}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} \right) - \left( \frac{\partial f_1}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} - \frac{\partial f_2}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \right)$$

$$[f_1 + f_2, g] = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f_1}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \right) + \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial f_2}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f_2}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \right) = [f_1, g] + [f_2, g]$$

$$3) [f, q_{\alpha}] = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial p_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial q_s} \right)$$

حيث أن  $\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial q_s} = 1$  في حالة ما إذا كانت  $s = \alpha$  وكذلك  $\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial p_s} = 0$  لعدم اعتماد  $q_{\alpha}$  على  $p_s$  لذا نجد أن:

$$[f, p_{\alpha}] = - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}}$$

$$4) [f, p_{\alpha}] = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_s} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial p_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial q_s} \right) = \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}}$$

وذلك لأن  $\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial p_s} = 1$  عندما  $\alpha = s$  ويساوى صفرا عندما  $\alpha \neq s$ .

هذا ويمكن أيضا إضافة الخواص التالية:

إذا كانت  $c$  كمية ثابتة فإن:

$$5) [f, f] = 0 \quad , \quad 6) [f, c] = 0$$

وإذا كانت  $h$  دالة ثالثة تعتمد على الإحداثيات المعممة وعلى كميات الحركة المعممة فإنه يمكن إثبات أن:

$$7) [h, f, g] = h[f, g] + [h, g]f$$

$$8) \frac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right]$$

$$9) [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

وتعرف الخاصية الأخيرة بأنها متطابقة جاكوب Jacobi Identity ويلاحظ فيها أن الدوال  $f, g, h$  تبقى في ترتيب دوري واحد عند استخدامها في حدود المتطابقة الثلاثة. هذا ويجب ملاحظة أنه عند الإثبات قد نستخدم العلاقات التالية:

$$\frac{\partial}{\partial q}(hf) = h \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial h}{\partial q} f$$

$$[p_\ell, p_k] = 0, \quad [q_\ell, q_k] = 0, \quad [q_\ell, p_k] = \delta_{\ell k}$$

حيث كما نعلم بأن  $\delta_{\ell k}$  هي كرونكر دلتا المعرفة كالتالي:

$$\delta_{\ell k} = \begin{cases} 1 & \ell = k \\ 0 & \ell \neq k \end{cases}$$

ويمكن بسهولة باستخدام أقواس بواسون استنتاج أن دالة هاملتون  $H$  هي أحد ثوابت الحركة إذا لم تعتمد صراحة على الزمن وذلك كالتالي:

إذا كانت  $H$  لا تعتمد صراحة فإن  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$  ومن الخاصية  $[H, H] = 0$  ينتج أن معادلة

الحركة تصبح  $\frac{dH}{dt} = 0$  وبذلك فإن  $H$  تكون ثابت حركة أي أن:

$$H(q_s, p_s) = \text{const.}$$

ثالثاً: اختبار قانونية التحويل باستخدام اقواس بواسون ولاجرانج  
 شرط قانونية التحويل واضح من أن  $[p, q]$  لا تغيرية تحت تأثير التحويل القانوني  
 ويكون شرط التحويل هو:

$$[p, q] = [Q, P] = \frac{\partial(PQ)}{\partial(pq)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial p}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial p}{\partial p} \end{bmatrix} = 1$$

والتحويل العكسي يكون

$$[P, Q] = [p, q] = \frac{\partial(pq)}{\partial(PQ)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{bmatrix} = 1$$

بالمثل عند حساب  $[P, q]$  و  $[Q, p]$  نجد كل منهما = 1.

مثال ١:

إذا كانت كل من الكميتين  $f(q, p, t)$ ,  $g(q, p, t)$  ثابت حركة ٠٠ أي أن:  
 $\frac{df}{dt} = 0$ ,  $\frac{dg}{dt} = 0$  فإن قوس بواسون  $[f, g]$  يكون أيضاً ثابت حركة وهذا يعني أن  
 قوس بواسون لأي ثابتي حركة في منظومة ميكانيكية هو نفسه ثابت حركة في  
 نفس المنظومة.

### الحل

لكي نثبت أن قوس بواسون  $[f, g]$  هو ثابت حركة إذا كانت كل من  $f, g$  ثابتي  
 حركة فإننا نحسب معدل تغيره بالنسبة للزمن:

$$\frac{d}{dt}[f, g] = [[f, g], H] + \frac{\partial}{\partial t}[f, g] \quad (1)$$

حيث أننا استخدمنا معادلة الحركة التي على الصورة:

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

ولكن بالنسبة للكمية  $[f, g]$  نفسها.

والآن من الخاصتين (٧)، (٨) وبوضع دالة هاملتون  $H$  بالإضافة للدالتين  $f, g$

في متطابقة جاكوب وكذلك استخدام الخواص الأخرى لأقواس بواسون نجد أن:

$$[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] = 0$$

$$[f, [g, H]] + [[f, H], g] = [[f, g], H]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]$$

وبالتعويض في المعادلة (١) نجد أن:

$$\frac{d}{dt} [f, g] = [f, [g, H]] + [[f, H], g] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right]$$

$$= [f, [g, H]] + \frac{\partial g}{\partial t} + [[f, H], g] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= [f, \frac{dg}{dt}] + \left[ \frac{\partial}{\partial t} (f, g) \right]$$

وحيث أن  $\frac{df}{dt} = 0, \frac{dg}{dt} = 0$  فإن  $\frac{d}{dt} [f, g]$  يكون ثابت حركة.

مثال ٢:

أثبت أن متجه كمية الحركة الزاوية (أو عزوم كمية الحركة)  $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{p}$  لنقطة مادية حول نقطة الأصل  $O$  يظل متجها ثابتا طول الحركة (أي يكون ثابت حركة) إذا كانت النقطة المادية تتحرك تحت تأثير قوة مركزية مركزه في النقطة  $O$  ودالة الجهد لها هي  $V(r)$ .

### الحل

المتجه  $\vec{M}$  يكون ثابت حركة إذا كانت مركباته الكرتيزية الثلاثة  $M_x, M_y, M_z$  ثوابت حركة وذلك حيث أن متجهات الوحدة  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ثوابت دائماً وأن:

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

والآن حيث أن كل من هذه المركبات  $M_x, M_y, M_z$  وكذلك المتجه  $\vec{M}$  لا يعتمد صراحة على الزمن أي أن:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \frac{\partial M_x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial M_y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial M_z}{\partial t} \vec{k} = 0 \quad (1)$$

وحتى تكون المركبات  $M_x, M_y, M_z$  وبالتالي  $\vec{M}$  ثوابت حركة فيجب أن تتلاشى أقواس بواسون لكل منها مع دالة هاملتون للمنظومة تحت الدراسة. وكما وجدنا من قبل أن دالة هاملتون للنقطة المادية هي:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \quad (2)$$

وحيث أن دالة الجهد  $V$  تعتمد على المسافة  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  فقط فإن:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \frac{x}{r} = \frac{x}{r} V'$$

وبالمثل

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{r} V', \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{z}{r} V'$$

والآن بحساب أقواس بواسون  $[M_x, H]$  من التعريف الأصلي لأقواس بواسون:

$$[M_x, H] = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial M_x}{\partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial M_x}{\partial p_s} \frac{\partial H}{\partial q_s} \right)$$

وحيث أن:

$$M_x = yp_z - zp_y$$

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

وذلك لأن:

$$H = \frac{1}{2m^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(r)$$

$$\begin{aligned} [M_x, H] &= \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial M_x}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ &+ \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial p_z} \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0 - 0 - p_z \frac{1}{z} p_y - (-z) \frac{\partial V}{\partial y} \\ &+ (-p_y) \frac{1}{m} p_z - y \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{m} p_z p_y + z \frac{y}{r} V' - \frac{1}{m} p_y p_z - y \frac{z}{r} V' \\ &= 0 \end{aligned}$$

وبالتالي فإننا نجد أن حيث أن  $\frac{\partial M_x}{\partial t} = 0$  فإنه يصبح ثابت حركة وبالتالي نجد أن:

$$\frac{dM_x}{dt} = [M_x, H] + \frac{\partial M_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow M_x$$

بالمثل يمكن إثبات أن  $M_y, M_z$  تكون ثابتي حركة إذ نجد:

$$[M_x, H] = 0, [M_y, H] = 0, [M_z, H] = 0$$

وهو المطلوب.

مثال ٣:

أوجد حل المثال السابق باستخدام خواص بواسون.

الحل

$$\begin{aligned} [M_x, H] &= [yp_z - zp_y, H] = [yp_z, H] - [zp_y, H] \\ &= y[p_z, H] + [y, H]p_z - z[p_y, H] - [z, H]p_y \\ [M_x, H] &= y\left(-\frac{\partial H}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\right)p_z - z\left(-\frac{\partial H}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\right)p_y \\ &= -y\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{m}p_y p_z + z\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{m}p_z p_y = -y\frac{z}{r}V' + z\frac{y}{r}V' = 0 \end{aligned}$$

$$[M_y, H] = 0, \quad [M_z, H] = 0,$$

وبالمثل:

$$[\vec{M}, H] = 0$$

وبالتالي ينتج أن:

مثال ٤:

أوجد أقواس بواسون للمركبات الكرتيزية لكل من المتجهين  $\vec{r}, \vec{p}$  اللذين يمكن كتابتهما على الصورة:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$$

الحل

أولاً: المتجه  $\vec{r}$  مع نفسه:

$$[x, x] = 0, \quad [y, y] = 0, \quad [z, z] = 0$$

ثانياً: المتجه  $\vec{p}$  مع نفسه:

$$[p_x, p_x] = 0, \quad [p_y, p_y] = 0, \quad [p_z, p_z] = 0$$

ثالثاً: المتجه  $\vec{r}$  مع المتجه  $\vec{p}$

$$[x, p_x] = 1, \quad [x, p_y] = 0, \quad [x, p_z] = 0$$

$$[y, p_x] = 0, \quad [y, p_y] = 1, \quad [y, p_z] = 0$$

$$[z, p_x] = 0, \quad [z, p_y] = 0, \quad [z, p_z] = 1$$

وجميع هذه الأقواس واردة في الخواص المدمجة التالية:

$$[q_\ell, q_k] = 0, \quad [p_\ell, p_k] = 0, \quad [q_\ell, p_k] = \delta_{\ell k}$$

مثال ٥:

إذا كانت  $H$  هي دالة هاملتون، فأثبت أنه إذا كانت  $f$  هي أي دالة تعتمد على

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

الموضع وكميات الحركة والزمن فإن:

### الحل

التفاضل الكلي للدالة  $f$  هو:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} \right) \quad (1)$$

المشتقة الكلية بالنسبة للزمن تعطي من:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} \right) \quad (2)$$

ولكن من معادلات هاملتون نعلم أن:

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \quad \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \quad (3)$$

من (٢)، (٣) نجد أن:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

وهو المطلوب.

## تمارين

(١) أثبت المتطابقة التالية لأقواس بواسون:

$$[f_1, [f_2, f_3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_1, f_2]] = 0$$

(٢) أثبت المتطابقة التالية لأقواس بواسون:

$$[h, f, g] = h[f, g] + [h, g]f$$

(٣) أثبت المتطابقة التالية لأقواس بواسون:

$$\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right]$$

# الفصل الثامن

دراسة حركة جسم متماسك

باستخدام معادلات لاگرانج

\* تعريفات

\* قانون العزم والعجلة الزاوية

\* طاقة حركة جسم يتحرك حركة مستوية

\* كمية الحركة الزاوية لجسم متماسك

\* دراسة حركة البندول المركب

\* دراسة كرة تتدحرج على مستوى مائل خشن

## الفصل الثامن

### دراسة حركة جسم متماسك باستخدام معادلات لاجرانج

#### ❖ تعريف الجسم المتماسك (الجاسئ):

هو ذلك الجسم الذي تظل المسافة بين أي نقطتين فيه ثابتة مهما أثرتنا عليه من قوة.

#### ❖ تعريف اللي أو عزم القوة:

يعرف بأنه فاعلية هذه القوة في توليد دوران محوريا ويقاس بحاصل ضرب قيمة هذه القوة  $\times$  المسافة العمودية بين محور الدوران وخط عمل أو تأثير هذه القوة.  
 ∴ العزم = القوة  $\times$  المسافة العمودية (مقاسة من محور الدوران إلى خط عمل القوة).  
 = القوة  $\times$  الذراع (ذراع القوة).

#### ❖ قانون العزم والعجلة الزاوية:

إذا ما تعرض جسم عزم قصوره (I) لتأثير قوة ذات عزم غير موازن وليكن (L) اكتسب الجسم عجلة زاوية  $\alpha$  بحيث أن:

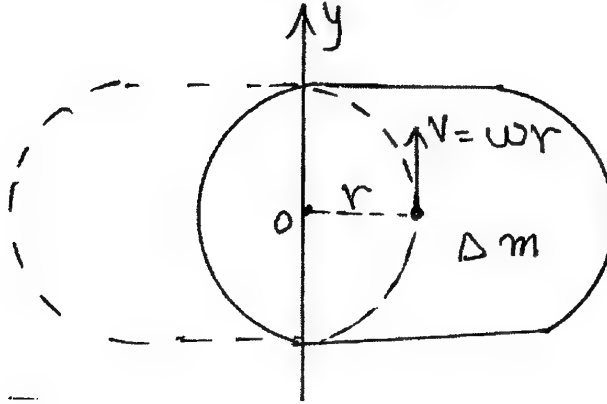
$$L = I\alpha$$

أي أن العزم = (عزم القصور) مضروباً في (العجلة الزاوية) .

#### طاقة حركة جسم يتحرك حركة مستوية

أ) طاقة الحركة في الجسم الذي يعمل حركة دورانية بحتة:  
 عندما يدور جسم متماسك حول محور ثابت 0 فإن جميع نقط الجسم تتحرك بنفس السرعة الزاوية  $\omega$  وتتوقف طاقة حركته الدورانية على:

شكل (٨ - ١)



(i) السرعة الزاوية.

(ii) طريقة توزيع الكتل المكونة للجسم حول محور الدوران.

فإذا فرضنا أنه لدينا عنصر صغير "جسيم" من الجسيم كتلته  $\Delta m$  يدور حول محور ما ويبعد المحور عن مركز كتلة الجسيم  $\Delta m$  بمسافة  $r$  وكانت سرعة الجسيم الزاوية هي سرعة الجسم ككل " $\omega$ " فإن طاقة الحركة للجسيم تعطى من:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2$$

$$\because v = \omega r$$

$$\therefore \Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 r^2 \quad (1)$$

طاقة الحركة للجسم ككل تصبح على النحو التالي:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \Delta E_k$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \Delta m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 \\
 &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2
 \end{aligned}$$

وذلك لأن السرعة الزاوية ثابتة للجسيم ككل أي لكل عناصره ويعرف

بـعزم القصور الذاتي للجسم حول محور الدوران ويرمز له بالرمز  $I$

$$\therefore E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (2)$$

أي أن طاقة الحركة الدورانية  $= \frac{1}{2}$  عزم القصور الذاتي للجسم  $\times$  مربع السرعة الزاوية.

### ❖ كمية الحركة الزاوية لجسم متماسك

بفرض أن لدينا كتلة  $\Delta m$  من جسم تتحرك حول محور الدوران بسرعة

خطية  $v$ .

$\therefore$  كمية الحركة الخطية هي  $\Delta m v$  وبما أن  $v = \omega r$  ،

$\therefore$  كمية الحركة للكتلة  $\Delta m$   $= \Delta m \omega r$

وعزم كمية الحركة حول محور  $= \Delta m \omega \vec{r} \cdot \vec{r}$

$$\Delta m \omega r^2 =$$

ويسمى عزم كمية الحركة حول محور الدوران بكمية الحركة الزاوية

$$= \sum_i (\Delta m_i r_i^2) \omega = \text{كمية الحركة الزاوية للجسم كله.}$$

$$= \omega \sum_i (\Delta m_i r_i^2)$$

$$= \omega I \quad (3)$$

والآن يمكن أن نكتب الكميات الميكانيكية المتشابهة للحركة الخطية والحركة الدورانية.

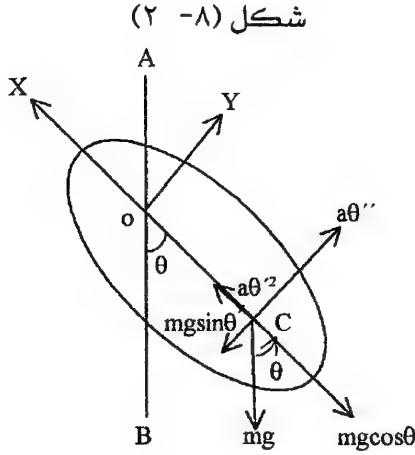
رمزها	الحركة الزاوية	رمزها	الحركة الخطية
$\theta$	الإزاحة الزاوية	$x$	الإزاحة الخطية
$\omega = \dot{\theta}$	الزاوية	$v = \dot{x}$	السرعة الخطية
$\alpha = \dot{\omega}$	العجلة الزاوية	$f = \dot{v}$	العجلة الخطية
$I$	عزم القصور الذاتي	$m$	الكتلة
$L$	عزم القوة	$F$	القوة
$I\omega$	كمية الحركة الزاوية	$mv$	كمية الحركة الخطية
$\frac{1}{2} \omega^2 I$	طاقة الحركة الزاوية	$\frac{1}{2} mv^2$	كمية الحركة الخطية

❖ تطبيقات على حركة جسم جاسئ باستخدام القانون الثاني لنيوتن ثم معادلات لاجرانج:

### أولاً: دراسة حركة البندول المركب:

البندول المركب هو عبارة عن جسم متماسك كتلته  $m$  مثبت بإحكام حول محور أملس بحيث يمكن للجسم أن يدور حول هذا المحور بسهولة ثم ثبت المحور في جدار فإذا تذبذب هذا الجسم حول محور التثبيت الأفقي تحت تأثير وزنه، المطلوب الآن هو دراسة حركة هذا البندول المركب.

### أولاً: بالميكانيكا الكلاسيكية



نعتبر أن مركز ثقل الجسم هو عند نقطة  $c$  التي تبعد بمقدار  $a$  من نقطة التعليق  $o$  ( والتي عندها محور الدوران). ونفرض أن  $co$  العمودي على محور الدوران المثبت في الجدار فإذا كان  $co$  يصنع زاوية  $\theta$  مع الرأسى المار بنقطة  $o$  وهو  $AB$  عند أي لحظة زمنية  $t$ . القوى المؤثرة على الجسم هي: (i) الوزن  $mg$  رأسياً إلى أسفل.

(ii) رد الفعل عند محور الدوران الذي يمكن تحليله إلى مركبتين هما  $X$  في اتجاه  $CO$  ومركبة  $Y$  في الاتجاه العمودي على  $CO$  ونفرضهم في أي اتجاه وتعين هذه الاتجاهات بعد حل المسألة.

بما أن مركز ثقل الجسم  $C$  سوف يرسم دائرة مركزها  $O$  ونصف قطرها  $a$  فيكون لها عجلتان هما  $(a\ddot{\theta}, -a\dot{\theta}^2)$  في الاتجاه العمودي على  $a$  وفي اتجاه زيادة  $a$ . معادلات الحركة للجسم المتماسك (معادلات خطية ومعادلات دورانية) تصبح على النحو التالي:

❖ معادلة الحركة في اتجاه  $CO$ .

$$ma\ddot{\theta} = X - mg\cos\theta \quad (1)$$

❖ معادلة الحركة في اتجاه عمودي على  $CO$ .

$$ma\ddot{\theta} = Y - mg\sin\theta \quad (2)$$

❖ معادلة الحركة الدورانية. (بأخذ العزوم حول  $O$ ).

$$I_O \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (3)$$

ولكن  $I_O$  هو عزم القصور الذاتي للجسم حول محور عمودي على مستوى الحركة ويمر بنقطة التعليق ويمكن إيجاده بدلالة عزم القصور عند مركز ثقل الجسم كالتالي:

$$I_O = I_c + ma^2 \quad (4)$$

والمعادلة (٣) يمكن كتابتها على الصورة:

$$I_O \dot{\theta} \frac{d\theta}{d\theta} = -mg \sin \theta$$

بفصل المتغيرات نجد أن:

$$I_O \dot{\theta} d\theta = -mg \sin \theta d\theta$$

وبالتكامل بالنسبة إلى  $\theta$  نجد أن:

$$\frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = +mg a \cos \theta + c_1 \quad (5)$$

بالتعويض من (٥) في (١)، (٢) يمكن إيجاد مركبتي رد الفعل عند  $O$ . وإذا تذبذب الجسم ذبذبات صغيرة حول نقطة التعليق  $O$  بحيث كانت  $\theta$  صغيرة يمكن إجراء التقريب:

$$\sin \theta \cong \theta$$

وبذلك المعادلة (٣) تصبح:

$$I_O \ddot{\theta} = -mga\theta$$

أو

$$\ddot{\theta} = -\frac{mga}{I_o} \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \quad (7)$$

حيث  $\omega = \sqrt{\frac{mga}{I_o}}$  والمعادلة (٧) هي معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o + ma^2}{mga}} \text{ أو } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mga}{I_o}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{mga}} \text{ هو:}$$

ثانياً: باستخدام معادلات لاجرانج:

طاقة الحركة الدورانية للبندول المركب تصبح:

$$T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$$

حيث  $I_o$  هي عزم القصور الذاتي حول نقطة  $O$ .

طاقة الجهد بالنسبة للمستوى الأفقي المار بالنقطة  $O$  هي:  $V = -mgacos\theta$  وطاقة

الحركة هي:  $T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + mgacos\theta$  وعلى ذلك تصبح دالة لاجرانج على الصورة

التالية:

$$L = T + V$$

معادلت لاجرانج تصبح:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_0 \dot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg \sin \theta$$

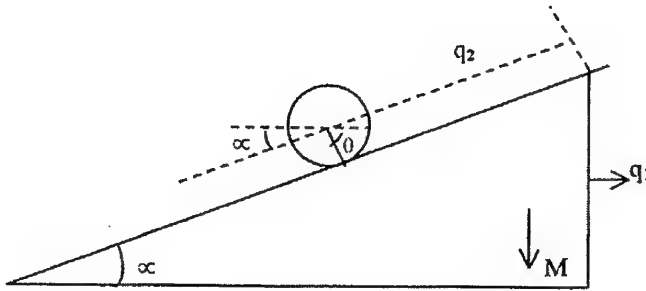
وعلى ذلك تصبح معادلة الحركة:

$$\ddot{\theta} = -\frac{ga}{I_0} \sin \theta$$

وهي نفس المعادلة (٣) التي سبق الحصول عليها وذلك باستخدام القانون الثاني لنيوتن.

### ثانياً: دراسة كرة تتدحرج على مستوى مائل خشن

شكل (٨-٣)



دراسة حركة كرة

كتلتها  $m$  تتدحرج

على مستوى مائل

خشن لوتد كتلته

$M$  يمكنه أن يتحرك

على مستوى أفقي

أملس (علماً بأن زاوية

ميل الوتد عن الأفقي

هي  $\alpha$ ).

المطلوب إيجاد كمية الحركة المعممة للنظام، ومعادلات لاجرانج.

لتكن  $q_1$  هي الإزاحة الأفقية للوتد ،  $q_2$  هي إزاحة مركز الكتلة للكرة على طول

الحافة المائلة للوتد والكرة تتحرك تحت نوعين من الإزاحات:

٢- انتقالية.

١- دورانية

السرعة الدورانية للكرة (السرعة الزاوية)  $\omega = \dot{\theta} = \frac{\dot{q}_2}{a}$  حيث  $\dot{q}_2$  هي السرعة على طول الحافة المائلة. والسرعة الانتقالية للكرة هي:

$$v^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(180 - \alpha)$$

$$= \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha$$

إذا طاقة الحركة نتيجة لدوران الكرة  $\frac{1}{2}I_s\omega^2$

ولكن عزم القصور الذاتي للكرة هو:  $I_s = \frac{2}{5}ma^2$

إذن طاقة الحركة نتيجة الدوران هي:

$$T_r = \frac{1}{2} \frac{2}{5} ma^2 \left( \frac{\dot{q}_2}{a} \right)^2 = \frac{1}{5} m\dot{q}_2^2$$

وطاقة الحركة نتيجة للانتقال هي:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha)$$

إذن طاقة الحركة الكلية للنظام هي طاقة حركة الكرة بالإضافة إلى طاقة حركة الوتد.

$$T = \frac{1}{2}M\dot{q}_1^2 + \frac{1}{5}m\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}(M + m)\dot{q}_1^2 + \frac{7}{10}m\dot{q}_2^2 - m\dot{q}_1\dot{q}_2\cos\alpha$$

طاقة الجهد مع اعتبار أن مستوى القياس هو السطح الأملس هي:

$$V = mg(\ell - q_2)\sin\alpha = K - mgq_2\sin\alpha$$

حيث  $K$  ثابت ،  $\ell$  هو طول الحافة المائلة للوتد.

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{q}_1^2 + \frac{7}{10}m\dot{q}_2^2 - m\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos \alpha + mgq_2 \sin \alpha - K$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} (M + m)\dot{q}_1 - m\dot{q}_2 \cos \alpha \quad (1)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{7}{5}m\dot{q}_2 - m\dot{q}_1 \cos \alpha + mg \sin \alpha \quad (2)$$

معادلات لاجرانج يمكن أن نحصل عليها الآن كما يلي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = (M + m)\ddot{q}_1 - m\ddot{q}_2 \cos \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

إذا معادلات لاجرانج هي:

$$(M + m)\ddot{q}_1 - m\ddot{q}_2 \cos \alpha = 0$$

والمعادلة الثانية هي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{7}{5}m\ddot{q}_2 - m\ddot{q}_1 \cos \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = mg \sin \alpha$$

إذن ثاني معادلات لاجرانج هي:

$$\frac{7}{5}m\ddot{q}_2 - m \cos \alpha \ddot{q}_1 - mg \sin \alpha = 0$$

وبذلك نكون قد حصلنا على معادلات الحركة باستخدام قوانين لاجرانج وهي نفس المعادلات التي يمكن الحصول عليها باستخدام القانون الثاني لنيوتن.

مثال ٣:

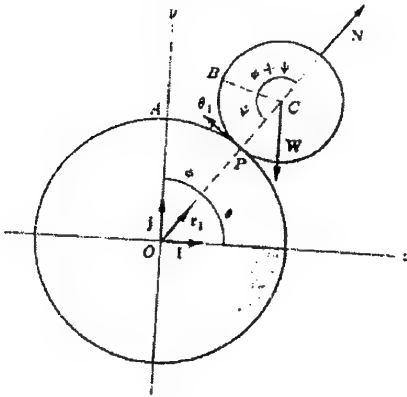
كرة نصف قطرها  $a$  وكتلتها  $m$  تستقر على قمة كرة خشبية مثبتة نصف قطرها  $b$ . أزيلت الكرة الأولى قليلاً بحيث تدحرجت على الكرة الثانية إلى أسفل دون انزلاق. عند أي نقطة سوف تترك الكرة الثانية الكرة الأولى.

الحل

أولاً: الحل باستخدام ميكانيكا نيوتن:

سوف نختار المستوي  $xy$  بحيث يمر بمركزي الكرتين ويكون مركز القوة المثبتة هو نقطة الأصل  $O$  انظر الشكل (٧-٤) أيضاً نعتبر أن موضع مركز الكتلة  $C$

شكل (٨-٤)



للكرة الأولى يقاس بالزاوية  $\theta$

وافترض أن متجه موضع مركز

الكتلة هذا بالنسبة إلى  $C$  هو  $\vec{r}$  نعتبر

كذلك أن  $\vec{r}_1, \vec{\theta}_1$  هما متجها الوحدة

كما يوضحها الشكل (٧-٥)،

بتحليل الوزن

$W = -mgj$  إلى مركبتين في اتجاهي

$\vec{r}_1, \vec{\theta}_1$  يكون لدينا:

$$W = (W \cdot \vec{r}_1) \vec{r}_1 + (W \cdot \vec{\theta}_1) \vec{\theta}_1$$

$$= (-mgj \cdot \vec{r}_1) \vec{r}_1 + (-mgj \cdot \vec{\theta}_1) \vec{\theta}_1$$

$$= -mg \sin \theta \vec{r}_1 - mg \cos \theta \vec{\theta}_1$$

قوة رد الفعل  $\vec{R}$  وقوة الاحتكاك  $\vec{f}$  هما  $\vec{R} = R \vec{r}_1$  ,  $\vec{f} = f \vec{\theta}_1$

من القانون الثاني لنيوتن يكون لدينا:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} = m[(\ddot{r} - \dot{r}\theta^2)\vec{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\theta}_1] \\ &= \vec{W} + \vec{R} + \vec{\mathcal{R}} \\ &= (R - mg \sin \theta)\vec{r}_1 + (\mathcal{R} - mg \cos \theta)\vec{\theta}_1\end{aligned}$$

ومنها يكون:

$$m(\ddot{r} - \dot{r}\theta^2) = R - mg \sin \theta, \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \mathcal{R} - mg \cos \theta \quad (1)$$

وحيث أن  $a+b=r$  (بعد  $C$  عن  $O$ ) فإن هاتين المعادلتين تصبحان:

$$-m(a+b)\theta^2 = R - mg \sin \theta, \quad m(a+b)\ddot{\theta} = \mathcal{R} - mg \cos \theta$$

والآن عزم الدوران الخارجي الكلي لجميع القوي حول الكتلة  $C$  (حيث  $\vec{R}, \vec{W}$  تمران خلال  $C$ ) هو:

$$\Lambda = (-a\vec{r}_1) \times \vec{\mathcal{R}} = (-a\vec{r}_1) \times (\mathcal{R}\vec{\theta}_1) = -a\mathcal{R}\vec{k}$$

وأیضا العجلة الزاوية للكرة الأولي حول  $C$  هو:

$$\alpha = \frac{d^2}{dt^2}(\phi + \psi)\vec{k} = -(\ddot{\phi} + \ddot{\psi})\vec{k}$$

وحيث أنه يوجد فقط تدحرج ولا يوجد انزلاق فإنه ينتج أن القوس  $AP$  يساوي القوس  $BP$  أو  $a\psi = b\phi$  عندئذ يكون:

$$(b/a)(\pi/2 = \psi - \theta), \quad \pi/2 - \theta = \phi$$

وينتج أن:

$$\vec{\alpha} = -(\ddot{\phi} + \ddot{\psi})\vec{k} = -(-\ddot{\theta} - \frac{b}{a}\ddot{\theta})\vec{k} = (\frac{a+b}{a})\ddot{\theta}\vec{k}$$

بما أن عزم القصور الذاتي للكرة الأولي حول محور الدوران الأفقي المار بالنقطة

$\frac{2}{3}ma^2 = I$  فإنه باستخدام مبدأ كمية التحرك الزاوي يكون لدينا:

$$\bar{A} = I\ddot{\alpha}, \quad -a\Re\vec{k} = \frac{2}{3}ma^2\left(\frac{a+b}{a}\right)\ddot{\theta}\vec{k}$$

$$\Re = -\frac{2}{3}m(a+b)\ddot{\theta} \quad \text{أو}$$

وباستخدام قيمة  $\Re$  هذه في المعادلة الثانية من (١) نجد أن:

$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(a+b)}\cos\theta \quad (2)$$

ويضرب الطرفين في  $\dot{\theta}$  وإجراء التكامل نجد بعد وضع  $\dot{\theta} = 0$  عند  $t = 0$  أو:

$$\frac{\pi}{2} = \theta \quad \text{أن:}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{10g}{7(a+b)}(1 - \sin\theta) \quad (3)$$

باستخدام (٣) في المعادلة الأولى من (١) نجد أن:

$$R = \frac{1}{2}mg(17\sin\theta - 10)$$

عندئذ يتضح أن الكرة الأولى تترك الكرة الثانية عند  $R = 0$  أي عند:

$$\theta = \sin^{-1}10/17$$

### ثانياً: الحصول علي معادلات الحركة باستخدام معادلات لاجرانج.

من الشكل (٧-٥) الذي فيه  $\psi, \phi$  تمثلان إحداثيات معمة. حيث أن الكرة التي

نصف قطرها  $CP=a$  تتدحرج بدون انزلاق على الكرة التي نصف قطرها  $OP=b$

يكون لدينا:

$$b\dot{\phi} = a\dot{\psi} \quad \text{أو} \quad b d\phi / dt = a d\psi / dt$$

ولهذا يبين أن:

$$b\dot{\phi} = a\dot{\psi} \quad (1)$$

إذا كانت  $\phi = 0$  عندما تكون  $\psi = 0$ .

وبناء على ذلك تكون كل من  $\psi, \phi$  (وبالتالي  $d\psi, d\phi$  أو  $\delta\psi, \delta\phi$ ) غير مستقلة. طاقة حركة الكرة المتحركة هي:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m(a+b)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m(a+b)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} ma^2 \right) (\dot{\phi} + \dot{\psi})^2 \end{aligned}$$

حيث أن:  $I = \frac{2}{5} ma^2$  هو عزم القصور الذاتي للكرة حول محور أفقي يمر بمركز كتلتها وطاقة جهد الكرة المتحركة باعتبار المستوي الأفقي المار خلال 0 مستوي قياسي) هي:

$$V = mg(a+b) \cos \phi$$

بذلك تكون دالة لاجرانج هي:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(a+b)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{5} ma^2 (\dot{\phi} + \dot{\psi})^2 - mg(a+b) \cos \phi \quad (2)$$

سوف نعتبر معادلات لاجرانج للمجموعات غير تامة التقييد لدينا من (1) أن:

$$b\delta\phi - a\delta\psi = 0 \quad (3)$$

إذا جعلنا:  $q_1 = \phi$ ,  $q_2 = \psi$  فإننا نجد بالمقارنة مع معادلة القيود اللحظية التالية:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} A_{\alpha} \delta q_{\alpha} &= 0, \quad \sum_{\alpha} B_{\alpha} \delta q_{\alpha} = 0, \\ \therefore A_1 &= b, \quad A_2 = -a \end{aligned} \quad (4)$$

وبذلك تصبح معادلتنا لاجرانج في هذه الحالة على الصورة:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \lambda_1 b \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \lambda_1 a \quad (6)$$

بالتعويض عن (٢) في (٥) و (٦) نحصل على:

$$m(a+b)^2 \ddot{\phi} + \frac{2}{5} ma^2 (\ddot{\phi} + \ddot{\psi}) - mg(a+b) \sin \phi = \lambda_1 b \quad (7)$$

$$\frac{2}{5} ma^2 (\ddot{\phi} + \ddot{\psi}) = -\lambda_1 a \quad (8)$$

وبالتعويض عن  $\psi = (b/a)\phi$  من (١) في (٧) و (٨) نجد أن:

$$m(a+b)^2 \ddot{\phi} + \frac{2}{5} ma^2 (1+b/a) \ddot{\phi} - mg(a+b) \sin \phi = \lambda_1 b \quad (9)$$

$$\frac{2}{5} ma^2 (1+b/a) \ddot{\phi} = -\lambda_1 a \quad (10)$$

والآن من (١٠) يكون لدينا:  $\lambda_1 = -\frac{2}{5} m(a+b)\phi$

وباستخدام هذه القيمة في (٩) نحصل بعد الاختصار والحل لإيجاد  $\phi$  على:

$$\ddot{\phi} = \frac{5g}{7(a+b)} \sin \phi$$

وهذه هي نفس المعادلة (٢) في الحل السابق في أولاً ، بوضع  $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$  لإيجاد الزاوية

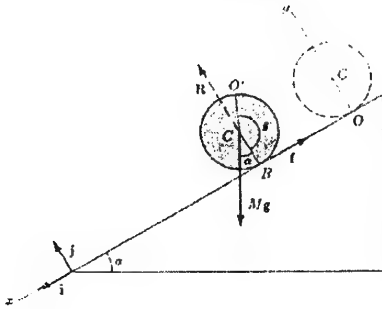
المطلوبة والتي عندها تسقط الكرة.

مثال ٤:

أسطوانة مصممة نصف قطرها  $a$  وكتلتها  $M$  تتدحرج بدون انزلاق علي مستوي مائل زاويته  $\alpha$ . أ- أثبت أن العجلة تكون ثابتة وتساوي:  $(2g \sin \alpha)/3$   
ب- أثبت أن معامل الاحتكاك يجب أن تساوي  $(\tan \alpha)/3$  على الأقل.

الحل

شكل (٨ - ٥)



نفرض أن الأسطوانة كانت في البداية تلامس المستوي عند 0 وأنه بعد زمن  $t$  تكون الأسطوانة قد دارت زاوية  $\theta$  أنظر الشكل (٨ - ٥). القوى التي تؤثر على الأسطوانة عند اللحظة  $t$  هي:  
(i) الوزن  $mg$  الذي يؤثر رأسياً لأسفل عند مركز الكتلة.  
(ii) رد الفعل  $R$  للمستوي المائل ويؤثر عمودياً على المستوي .

(iii) قوة الاحتكاك  $f$  وتؤثر في اتجاه ينطبق على المستوي المائل إلى أعلى.  
سوف نختار المستوي  $xy$  ليكون المستوي الذي تحدث فيه الحركة بحيث يكون الاتجاه الموجب للمحور  $x$  في اتجاه السطح المائل إلى أسفل وتكون نقطة الأصل عند 0. إذا كان  $\vec{r}$  هو متجه موضع مركز الكتلة في اللحظة  $t$  فإنه حسب نظرية كمية الحركة الخطية يكون:

$$M\vec{r} = M\vec{g} + \vec{R} + \vec{f} \quad (1)$$

ولكن:

$$\vec{g} = g \sin \alpha \vec{i} - g \cos \alpha \vec{j}, \quad \vec{R} = R \vec{j}, \quad \vec{f} = -f \vec{i}$$

عندئذ يمكن كتابة (١) على الصورة:

$$M\vec{r} = (Mg \sin \alpha - f) \vec{i} + (R - Mg \cos \alpha) \vec{j} \quad (2)$$

عزم الدوران الخارجي الكلي حول المحور الأفقي المار بمركز الكتلة هو:

$$\vec{A} = 0 \wedge M\vec{g} + 0 \wedge \vec{R} + C\vec{B} \wedge \vec{f} = C\vec{B} \wedge \vec{f} = (-a\vec{j}) \wedge (-f\vec{i}) = -af\vec{k} \quad (3)$$

وكمية الحركة الزاوية الكلية حول المحور الأفقي المسار بمركز الكتلة هي:

$$\vec{\Omega} = I_C \vec{\omega} = I_C (-\theta \vec{k}) = -I_C \theta \vec{k} \quad (4)$$

حيث  $I_C$  هو عزم القصور الذاتي للأسطوانة حول هذا المحور:بالتعويض من (٣) و (٤) في  $\Lambda = \frac{d\Omega}{dt}$  نجد أن:

$$I_C \ddot{\theta} = af \quad \text{أو} \quad -af\vec{k} = -I_C \ddot{\theta} \vec{k}$$

باستخدام  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  في (٢) نحصل على:

$$M_x = Mg \sin \alpha - f, \quad M_y = R - Mg \cos \alpha \quad (5)$$

والآن إذا لم يكن هناك انزلاق فإن  $a\theta = x$  أو  $\frac{x}{a} = \theta$  بالمثل حيث أن الأسطوانة تظلعلى المستوي المائل فإن  $y = 0$  وينتج من (٥) أن:

$$R = Mg \cos \alpha$$

بالتعويض عن:  $\frac{x}{a} = \theta$  في:  $I_C \ddot{\theta} = af$  نجد أن:

$$f = I_C \ddot{x} / a^2$$

ونعلم أن:  $I_C = \frac{1}{2} Ma^2$  عندئذ بالتعويض  $f = \frac{1}{2} M\ddot{x}$  في المعادلة الأولى من (٥) نحصل

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad \text{علي:}$$

ب- نعلم أن معامل الاحتكاك هو:  $\mu = \frac{f}{R}$

من بند السابق (١) لدينا:  $\frac{1}{3} Mg \sin \alpha = \frac{1}{2} M_x = f$  ،  $Mg \cos \alpha = R$

ولكي لا يحدث انزلاق فيجب أن يكون معامل الاحتكاك  $\mu$  على الأقل:

$$\frac{1}{3} \tan \alpha = \frac{f}{R}$$

### مثال ٥:

أ- حل المثال السابق (٤) على أساس أن معامل الاحتكاك بين الأسطوانة والمستوي المائل هو  $\mu$  . ب) ناقش الحركة عند قيم مختلفة لمعامل الاحتكاك  $\mu$ .

### الحل

أ- في المعادلة (٥) من المثال السابق ، نعوض عن  $f = \mu R = \mu Mg \cos \alpha$

$$x = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad \text{فتحصل على:}$$

نلاحظ أن مركز كتلة الأسطوانة في هذه الحالة يتحرك بنفس الطريقة مثل جسيم ينزلق على المستوي إلى أسفل لكن الأسطوانة يمكن لها أن تنزلق أو تتدحرج على السواء.

عجلة التدحرج هي:

$$a\ddot{\theta} = \frac{a^2 f}{I_C} = \frac{a^2 \mu Mg \cos \alpha}{\frac{1}{2} Ma^2} = 2\mu g \cos \alpha$$

وعجلة الانزلاق هي:

$$\ddot{x} - a\ddot{\theta} = g(\sin \alpha - 3\mu \cos \alpha)$$

ب- إذا كان:

$$\mu < \frac{1}{3} \tan \alpha \quad \text{فإن} \quad (\sin \alpha - 3\mu \cos \alpha) > 0$$

وعندئذ يجب أن يحدث انزلاق. إذا كان:

$$\mu \geq \frac{1}{3} \tan \alpha \quad \text{فإن} \quad (\sin \alpha - 3\mu \cos \alpha) \leq 0$$

وعندئذ يحدث التدحرج وليس الانزلاق وهذه النتائج تتفق مع نتائج المثال السابق (٤).

# الملاحق

## ملحق (١)

- أنظمة الإحداثيات ومعادلات التحويل
- الإحداثيات الكرتيزية
- الإحداثيات الأسطوانية
- الإحداثيات القطبية الكروية
- دوران محاور الإحداثيات
- طول قوس المنحنى في الإحداثيات المختلفة

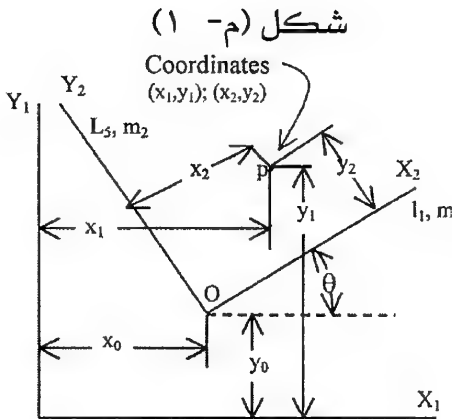
## ملحق (١)

### أنظمة الإحداثيات ومعادلات التحويل

يتحدد موضع أي نقطة مادية في الفراغ إذا علمت ثلاث كميات مستقلة تسمى بالإحداثيات. وفي الواقع هناك أكثر من اختيار لهذه الإحداثيات، فيمكن تحديد موقع النقطة المادية باستخدام الإحداثيات الكرتيزية  $(x, y, z)$ ، أو باستخدام الإحداثيات الأسطوانية  $(\rho, \phi, z)$  أو باستخدام الإحداثيات القطبية الكروية  $(r, \theta, \phi)$ .

#### (أ) الإحداثيات الكرتيزية، Rectangular coordinate

نعتبر في البداية الإحداثيات الكرتيزية لنقطة مادية عند النقطة  $p$  في بعدين فقط (أي في مستوى وليس في الفراغ) كما هو موضح بشكل (م-١).



إحداثيات النقطة  $p$  بالنسبة للمحورين الكرتيزيين المتعامدين  $X_1, Y_1$  نفرض أنهما  $x_1, y_1$  على الترتيب. أما إحداثيات نفس النقطة  $p$  بالنسبة للمحورين الكرتيزيين المتعامدين  $X_2, Y_2$  نفرض أنهما  $x_2, y_2$  مع ملاحظة أن المحورين  $X_2, Y_2$  لهما

## الملاحق

نقطة أصل مختلفة وكذلك حدث لها دوران بزاوية  $\theta$ ، كما هو مبين بشكل (م- ١).

والآن يمكننا كتابة معادلات التحويل لإحداثيات النقطة  $p$  بين نظامي الإحداثيين السابقين على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta \\ y_1 &= y_0 + x_2 \sin \theta - y_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

مع ملاحظة أن  $x_1, y_1$  كل منها دالة في المتغيرين  $x_2, y_2$  والمعادلة (١) يمكن كتابتها في الصورة التالية:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \ell_1 x_2 + \ell_2 y_2 \\ y_1 = y_0 + m_1 x_2 + m_2 y_2 \end{cases} \quad (2)$$

حيث  $\ell_1, m_1$  هي جيوب تمام الإحداثي  $x_2$  بالنسبة للإحداثيين  $x_1, y_1$  بينما  $\ell_2, m_2$  هي جيوب تمام الإحداثي  $y_2$  بالنسبة للإحداثيين  $x_1, y_1$ .

أما إذا كانت نقطة أصل المحورين  $x_2, y_2$  تحرك بسرعة ثابتة (مركباتها  $v_x, v_y$ ) بالنسبة للمحورين  $x_1, y_1$  وكذلك المحورين  $x_2, y_2$  يدوران بسرعة زاوية منتظمة ولتكن  $\omega$  حيث  $\theta = \omega t$ .

فتصبح المعادلتان (١)، (٢) في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\begin{cases} x_1 = v_x t + x_2 \cos \omega t - y_2 \sin \omega t \\ y_1 = v_y t + x_2 \sin \omega t + y_2 \cos \omega t \end{cases} \quad (3)$$

ويلاحظ في الحالة الأخيرة أن  $x_1, y_1$  كل منها أصبح دالة في ثلاثة

متغيرات هي  $x_2, y_2, t$ .

## الملاحق

ومعادلات التحويل السابقة يمكن كتابتها على الصورة العامة التالية:

$$x_1 = x_1(x_2, y_2, t) , \quad y_1 = y_2(x_2, y_2, t).$$

وعموماً في الإحداثيات الكرتيزية المتعامدة في الفراغ الثلاثي يمكن

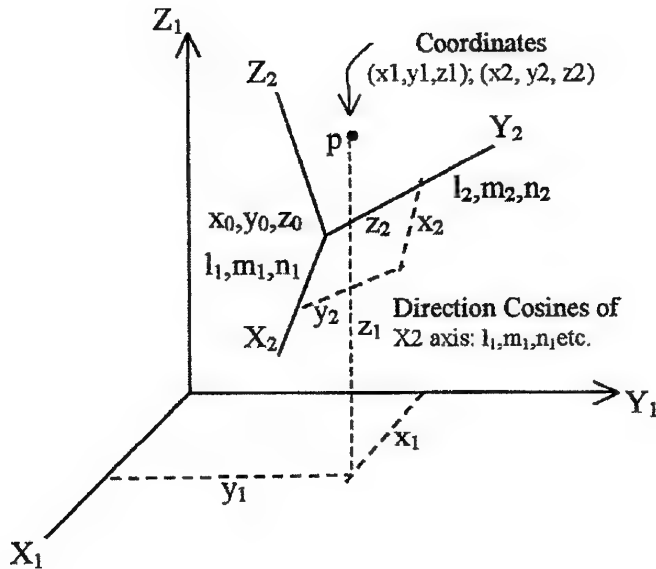
تعميم النتائج السابقة بسهولة وذلك باعتبار الشكل التالي (م- ٢).

حيث أنه واضح من الرسم أن إحداثيات النقطة  $p$  هي  $x_1, y_1, z_1$  بالنسبة للمحاور  $X_1, Y_1, Z_1$  بينما إحداثياتها بالنسبة للمحاور  $X_2, Y_2, Z_2$  هي

$x_2, y_2, z_2$  وعلاقات التحويل بين النظامين يصبح:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + l_1 x_2 + l_2 y_2 + l_3 z_2 \\ y_1 &= y_0 + m_1 x_2 + m_2 y_2 + m_3 z_2 \\ z_1 &= z_0 + n_1 x_2 + n_2 y_2 + n_3 z_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

شكل (م- ٢)

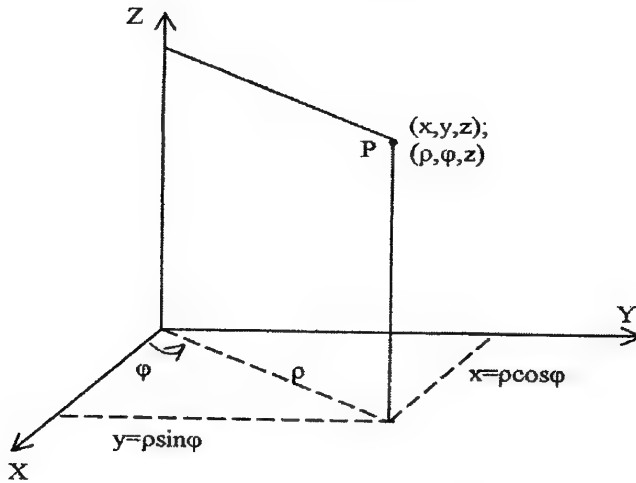


## الملاحق

حيث  $\ell_1, m_1, n_1$  جيوب تمام الإحداثي  $X_2$  بالنسبة لنظام المحاور  $X_1, Y_1, Z_1$  وبالمثل  $(\ell_3, m_3, n_3)$ ،  $(\ell_2, m_2, n_2)$  جيوب تمام الإحداثيين  $Y_2, Z_2$  بالنسبة لنظام المحاور  $X_1, Y_1, Z_1$  على الترتيب.

(ب) الإحداثيات الأسطوانية: The cylindrical coordinates

شكل (م- ٣)



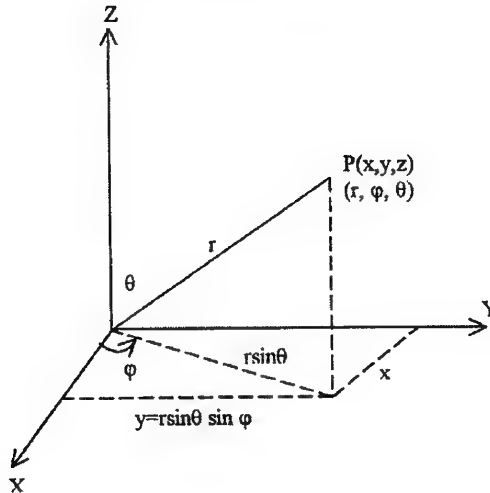
وهي فيها طولين وزاوية وعلاقات التحويل بين إحداثيات أي نقطة  $p$  بالنسبة لمحاور كرتيزية متعامدة  $(x, y, z)$  والإحداثيات الأسطوانية  $(\rho, \phi, z)$  يعطى على الصورة:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \quad (5)$$

## الملاحق

(ج) الإحداثيات القطبية الكروية: The Spherical coordinates

شكل (م- ٤)



وهي فيها زاويتان  $\theta, \phi$  وطول  $r$  كما بالرسم، والعلاقات بينها وبين الإحداثيات الكرتيزية  $x, y, z$  لأي نقطة في الفراغ الثلاثي تعطى على النحو التالي:

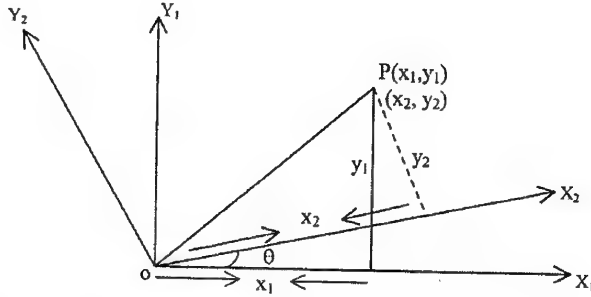
$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (6)$$

ويلاحظ أن  $x, y$  كل منها دالة في  $(r, \theta, \phi)$  بينما  $z$  دالة فقط في  $r, \theta$ .

ملاحظة عن دوران محاور الإحداثيات:

شكل (م- ٥)

## الملاحق



نفرض أنه لدينا نظامين إحداثيين قائمين متحدين بنقطة الأصل  $O$ . ولنفرض كذلك أن الزاوية من  $OX_1$  إلى  $OX_2$  هي  $\theta$ . لتكن  $P$  نقطة من المستوى ولتكن  $\alpha$  هي الزاوية المحصورة بين  $OX_2$ ،  $OP$ . إحداثيات  $P$  بالنسبة للنظام  $X_1OY_1$  هما  $(x_1, y_1)$  وبالنسبة للنظام  $X_2OY_2$  هما  $(x_2, y_2)$  عندئذ يكون:

$$\frac{x_1}{op} = \cos(\theta + \alpha) = \cos \theta \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha \quad (1)$$

ولكن:

$$\sin \alpha = \frac{y_2}{op}, \quad \cos \alpha = \frac{x_2}{op} \quad (2)$$

من (٢) في (١) نجد أن:

$$\frac{x_1}{op} = \frac{x_2}{op} \cos \theta - \frac{y_2}{op} \sin \theta$$

وفيها نجد أن:

$$x_1 = x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta$$

ويمكننا بشكل مماثل أن نرى:

$$y_1 = x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta$$

## الملاحق

طول قوس المنحنى فى الاحداثيات المختلفة

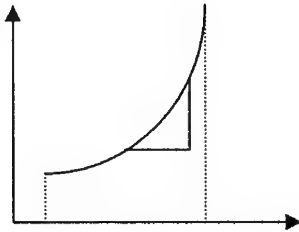
(١) طول قوس من منحنى فى الإحداثيات الكارتيزية فى المستوى

$$(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$



(٢) عنصر الطول فى الإحداثيات الكارتيزية فى الفراغ

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

$$\text{حيث } x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}$$

(٣) طول قوس من منحنى فى المستوى بإستخدام الإحداثيات القطبية

$$(d\ell)^2 = (dr)^2 + (r d\theta)^2$$

$$\ell = \int_a^\beta \sqrt{r'^2 + r^2} d\theta$$

$$\text{حيث } r' = \frac{dr}{d\theta}$$

## الملاحق

(٤) طول عنصر قوس في الإحداثيات الكرويه

$$d\ell = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin\theta d\phi)^2}$$

(٥) طول عنصر القوس على سطح كروي  $r = a$

نصف القطر ثابت  $r = a$  أي  $dr = 0$

$$d\ell = a \sqrt{(a d\theta)^2 + (\sin\theta d\phi)^2}$$

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} a \sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta} d\theta, \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\phi}$$

(٦) طول عنصر القوس على سطح أسطوانة دائرية نصف قطرها  $a$

$r = a = \text{const.}$  و  $dr = 0$

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 (d\theta)^2 + (dz)^2} d\theta, \quad z' = \frac{dz}{d\theta}$$

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 + z'^2} d\theta, \quad z' = \frac{dz}{d\theta}$$

وعلى سطح المخروط  $\theta = c$  ,  $d\theta = 0$

$$d\ell = \sqrt{(dr)^2 + 0 + (dz)^2}, \quad \tan\alpha = \frac{r}{z}$$

حيث  $\alpha$  هي الزاوية من الراسم ومحور المخروط.

## ملحق (٢)

ملحق (٢)

معادلة أويلر لاجرانج

تسمى المعادلة

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1)$$

معادلة أويلر لاجرانج وهي معادلة تفاضلية ( أنظر الفصل الرابع ) من الرتبة الثانية وحيث أن المعادلة التفاضلية (1) حلها يعطى ثابتين إختياريين يمكن تعيينهما من الشروط الحدية عند نقطتي البداية والنهاية للمنحنى المراد تعيينه. وهي تعطى الشرط الضروري للحصول على المنحنى الأمثل  $y = y(x)$  الذي قيمة التكامل الآتي:

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2)$$

قيمة قصوى ( عظمى أو صغرى ) Extremum .

تعرف أيضاً المعادلة (1) المنحنيات التي تسمى بالحلول المتطرفة أو التوقيفية

للتكامل (2) Extremals

مع ملاحظة إذا كان منحنى التوقف ( الحل المتطرف ) يتكون من أكثر من فرع فإنه من الضروري أن نتأكد من أن نقطتي البداية والنهاية  $a, b$  يقعان على نفس الفرع.

## الملاحق

### مثال (١)

أوجد معادلة المنحنى الواصل بين النقطتين  $(0,0)$  ,  $(1,a)$  والذي يجعل التكامل التالي قيمة توقف

$$I = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2y e^x) dx$$

### الحل

الدالة  $F$  هي:

$$F(x, y, y') = y^2 + y'^2 + 2y e^x \quad (1)$$

ومنها نجد أن

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2e^x \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \quad (3)$$

بالتعويض في معادلة اويلر لاجرانج نحصل على

$$y + e^x - y'' = 0$$

$$y'' - y = e^x \quad (4)$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية حلها يعطى من حل المعادلة المتجانسة

$$y'' - y = 0 \text{ وهو}$$

$$y_c = A e^{-x} + B e^x \quad (5)$$

والحل الخاص  $y_p$  للمعادلة غير المتجانسة

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 1} \{e^x\} = \frac{1}{2} x e^x \quad (6)$$

والحل العام للمعادلة (4) سيكون

$$y = y_c + y_p = A e^{-x} + B e^x + \frac{1}{2} x e^x \quad (7)$$

وحيث أن الحل المتطرف للمنحنى المطلوب يجب أن يمر بنقطتي النهاية  $(0,0)$  ،  $(1,a)$  فهذا يجعلنا نعين الثوابت  $A$  ،  $B$  في المعادلة (7)

$$A + B = 0$$

$$a = A e^{-1} + B e + \frac{1}{2} e$$

بالتعويض عن  $A = -B$  من المعادلة الأولى في الثانية

$$a = b(-e^{-1} + e) + \frac{e}{2}$$

$$B = \frac{\left(a - \frac{e}{2}\right)}{e - e^{-1}} = \alpha$$

$$A = -\frac{\left(a - \frac{e}{2}\right)}{e - e^{-1}} = -\alpha$$

بالتعويض في المعادلة (7) نحصل على

$$y = 2\alpha \sinh x + \frac{1}{2} x e^x$$

$$y = \alpha(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2} x e^x \quad (8)$$

والمعادلة (8) تمثل معادلة المنحنى الذي يجعل التكامل المعطى قيمة توقف.

### تعميم لمعادلة أويلر - لاجرانج للدالة $F$ ذي التفاضلات من الرتبة العليا

تستخدم معادلة أويلر - لاجرانج لإيجاد معادلة المنحنى  $y = y(x)$  والذي يجعل التكامل

$$I = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$$

نهاية قصوى ( وهي شرط ضروري ) تأخذ الصورة

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0 +$$

وهي معادلة تفاضلية تعتبر تعميم لمعادلة أويلر - لاجرانج في حالة وجود مشتقات تفاضلية من الرتبة  $n$ .

### معادلة أويلر - لاجرانج والشروط الضرورية والكافية لها:

على الرغم من أن معادلة أويلر - لاجرانج تعطى فقط الشرط الضروري الذي يجعل التكامل  $I$  قيمة توقف فإنه من الممكن أن نختبر مباشرة إذا كانت قيمة التوقف قيمة صغرى أو عظمى وهذا واضح من التكامل

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

وكما سبق في الفصل الرابع ( لإيجاد المنحنى الأمثل والذي يجعل قيمة التكامل قيمة قصوى ) اعتبرنا  $\varepsilon$  بارامتر ،  $\xi$  متغيراً اختياريً فهنا يوجد عدد لا نهائي من المسارات يمكن أن يصل بين  $a$  ،  $b$  ولكن يوجد مسار واحد فقط يجعل التكامل نهاية صغرى وبالتالي يصبح التكامل

$$I + \delta I = \int_a^b F(x, y + \varepsilon \xi, y' + \varepsilon \xi') dx$$

وباستخدام ماكلاورين

$$F(x, y + \varepsilon \xi, y' + \varepsilon \xi') = F(x, y, y') + \varepsilon \left[ \xi \frac{dF}{dy} + \xi' \frac{dF}{dy'} \right] +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2!} \left[ \xi^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\xi \xi' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \xi'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \right] + O(\varepsilon^3)$$

$$\therefore I = \varepsilon \int_a^b \left[ \xi \frac{\partial F}{\partial y} + \xi' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2!} \int_a^b \left[ \xi^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\xi \xi' \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \xi'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \right] + O(\varepsilon^2)$$

الشرط الكافي لكي يكون I قيمة عظمى

$$I_1 = 0 \quad \text{and} \quad I_2 < 0$$

الشرط الكافي لكي يكون I قيمة صغرى

$$I_1 = 0 \quad \text{and} \quad I_2 > 0$$

ومن ثم فإن  $I_1 = 0$  ونحصل على

$$\int_a^b \xi(x) \left[ F_y - \frac{d}{dx} (F_{y'}) \right] dx = 0$$

وحيث أن  $\xi(x)$  اختيارية فإن

### الملاحق

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

وهذه هي معادلة أويلر - لاجرانج .

#### مثال (٢):

أوجد معادلة منحنى التوقف الواصل بين النقطتين (1,1) ،  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$  والذي

$$I = \int x^2 y'^2 dx \text{ يجعل التكامل}$$

قيمة قصوى وهل القيمة عظمى أم صغرى ؟

#### الحل

بما أن  $F(x, y, y') = x^2 y'^2$  ومنها نوجد  $\frac{\partial F}{\partial y}$  ،  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  والتعويض في

معادلة أويلر - لاجرانج فنحصل على

$$\frac{d}{dx} (2x^2 y') = 0$$

وحل هذه المعادلة يعطى

$$y = -\frac{A}{x} + B$$

وباستخدام الشروط الركنية نحصل على  $A = -1$  ،  $B = 0$

$$y = \frac{1}{x}$$

وهى معادلة قطع زائد قائم يقع في الربع الموجب

## الملاحق

( لاحظ أن النقط  $a = (1,1)$  ,  $b = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$  تعطى نفس منحنى

التوقف إلا أن النقطة  $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$  تقع على فرع آخر وفي الربع السالب وأن

منحنى التوقف لا يمر بنقطة الأصل )

بعد إيجاد منحنى التوقف  $\varepsilon_0: y = \frac{1}{x}$

نفرض أن هناك منحنى آخر بحيث أن

$$\varepsilon: y = \frac{1}{x} + \xi(x) \quad \text{where} \quad \xi(x) \in C_2, \quad \xi(1) = 0, \quad \xi(2) = 0$$

نحسب التكامل

$$I(\varepsilon) = \int_1^2 x^2 \left( -\frac{1}{x^2} + \xi' \right)^2 dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x^2} - 2\xi' + x^2 \xi'^2 \right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^2 x^2 \xi' dx - 2 \int_1^2 \xi' dx$$

$$\therefore I(\varepsilon_0) + \int_1^2 x^2 \xi'^2 dx - 0$$

$$I(\varepsilon) - I(\varepsilon_0) = \int_1^2 x^2 \xi'^2 dx > 0$$

وهذا يعني أن  $I(\varepsilon) > I(\varepsilon_0)$

## الملاحق

وحيث إن  $\eta'$  متجه اختياري ومن ثم فإن منحنى التوقف يعطي قيمة صفري للتكامل وهذه القيمة

$$I(\varepsilon_0) = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}$$

بعض الحالات الخاصة لمعادلة أويلر - لاجرانج :

نعلم أن معادلة أويلر - لاجرانج

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\therefore F = F(x, y, y')$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy'$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

فتصبح معادلة أويلر - لاجرانج

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{dy}{dx} \right] = 0$$

or

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} - F_{y'y'} - y'' = 0$$

الحالة الأولى : إذا كانت  $F = F(x, y)$

فإن  $F_{xy'} = F_{yy'} = F_{y'y'} = 0$  وتصبح معادلة أويلر - لاجرانج

$$F_y = 0$$

الحالة الثانية : إذا كانت  $F = F(y')$

## الملاحق

فإن  $F_y = F_{x y'} = F_{y y'} = 0$  وتصبح معادلة أويلر - لاجرانج

$$F_{y' y'} y'' = 0$$

ومنها إما  $y'' = 0 \Rightarrow y = c_1 x + c_2$

أو  $F_{y' y'} = 0 \Rightarrow y = k_1 x + c$  جذر حقيقي ،  $y' = k$

الحالة الثالثة : إذا كانت  $F = F(x, y)$

فإن  $F_y = 0$

وتصبح معادلة أويلر - لاجرانج

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

ومنها  $\frac{\partial F}{\partial y'} = c_1$

الحالة الرابعة : إذا كانت  $F = F(x, y, y')$

$$\therefore \frac{dF}{dx} = F_x + F_y y' + F_{y'} y'' \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} (y' F_{y'}) = y' \frac{d}{dx} (F_{y'}) + F_{y'} y'' \quad (2)$$

ب طرح (1) من (2) نحصل على :

$$\frac{d}{dx} [F - y' F_{y'}] = F_x + F_y y' - y' \frac{d}{dx} [F_{y'}]$$

$$\frac{d}{dx} [F - y' F_{y'}] = F_x + y' \underbrace{\left[ F_y - \frac{d}{dx} (F_{y'}) \right]}_0$$

وتصبح معادلة أويلر - لاجرانج على الصورة :

$$\frac{d}{dx} [F - y' F_{y'}] - F_x = 0$$

الحالة الخامسة :  $F = F(y, y')$  أي  $F$  لا تعتمد صراحة على  $x$

## الملاحق

$$\therefore \frac{d}{dx} [F - y' F_{y'}] - 0 = 0$$

$$F - y' F_{y'} = \text{const.}$$

### مثال (٣) :

إذا سقط جسيم كتلته  $m$  تحت تأثير وزنه فقط فادرس حركته إذا كانت طاقة

$$\text{الحركة } T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \text{ وطاقة وضعه } V = -mgy.$$

### الحل :

$$\therefore I = m \int_{t_0}^t \left( \frac{\dot{y}^2}{2} + gy \right) dt$$

حيث ما تحت التكامل هو دالة لاجرانج  $\ell = T - V$

باستخدام معادلة أولر - لاجرانج (مع تبديل  $x$  بـ  $t$ )  $(F(t, y, y')) = \left( \frac{\dot{y}}{2} + gy \right)$

نحصل على :

$$\frac{d}{dt} (\dot{y}) - g = 0$$

$$\ddot{y} = g$$

ومنها

$$\dot{y} = gt + \alpha, \quad y = \frac{1}{2} gt^2 + \alpha t + \beta$$

باستخدام الشروط نوجد  $\alpha, \beta$

ولدراسة طبيعة قيمة التوقف وذلك بحساب التكامل  $I$  على المنحنى المتغير

$$Y(t) = y(t) + \eta(t)$$

حيث  $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$  ,  $\eta(t) \in C_2$

$$I(Y) = m \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} (y' + \eta')^2 + g(y + \eta) \right] dt$$

$$= I(y) + m \int_{t_0}^t \left[ y' \eta' + y'' + \frac{1}{2} \eta'^2 \right] dt$$

$$= I(y) + m \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} (y' \eta) dt + \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \eta'^2 dt$$

وحيث إن  $\eta$  تتعدم عند كل من  $t_0$  ،  $t_1$  فإن :

$$I(Y) - I(y) = \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \eta'^2 dt > 0$$

وعلى ذلك فإن المعنى  $y$  يعطي قيمة صغرى للتكامل.

والتغير هنا تغير قوي لأن المجال محافظ ولا يوجد قيود على الحركة.

مثال (٤) : أوجد منحنى القيمة القصوى للتكامل

$$I = \int_{x_0}^{x_1} (y + x y') dx$$

الحل :

$$\therefore F(x, y, y') = y + x y'$$

بحساب كل من  $F_y$  ،  $F_{y'}$  والتعويض في معادلة أولر - لاگرانج نحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} (x)$$

## الملاحق

إذاً معادلة أويلر - لاجرانج تتحول إلى متطابقة ومن ثم فإن التكامل لا يعتمد على المسار ومن ثم فقيمة التكامل تعتمد على نقطة البداية والنهاية ولا تعتمد على مسار التكامل ومن ثم فإن مسألة حساب التغيرات لا معنى لها.

مثال : أوجد مجموعة المنحنيات  $y(x) = y$  التي تجعل قيمة التكامل

$$I = \int_0^{\pi/2} [y'^2 - y^2] dx$$

قيمة قصوى ثم حدد نوعها والتي تحقق الشروط المركبة  $y(0) = 0$  ،  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

**الحل :**

$$F(x, y, y') = y'^2 - y^2 \quad \text{بما أن الدالة}$$

$$\text{بتطبيق معادلة أويلر - لاجرانج ( } F_y = -2y, F_{y'} = 2y' \text{ )}$$

نحصل على :

$$y'' + y = 0$$

والتي حلها

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\text{بتطبيق الشروط نحصل على } C_2 = 1, C_1 = 0$$

وتكون :

$$y(x) = \sin x$$

وهذه هي معادلة المنحنى الذي يجعل قيمة التكامل قيمة قصوى وتحديد نوع النهاية

كما سبق في الأمثلة السابقة أو بتطبيق شروط لاجندر (أو فيرشتراس) وهو بمعرفة

إشارة  $F_{y'y'}$  كالآتي:

$$\therefore F(x, y, y') = y'^2 - y^2$$

$$\therefore F_{y'y'} = 2y' , F_{y'y'} = 2 > 0$$

فيكون نوع النهاية نهاية صغرى.

## الملاحق

**مثال :**

أوجد منحنى الدالة  $y = y(x)$  الذي يجعل التكامل  $I = \int_0^1 [y^2 + x^2 y'] dx$  قيمة

قصوى وحدد نوعها علماً بأنه يحقق الشروط الركنية  $y(0) = 0, y(1) = 0$

**الحل :**

$$F(x, y, y') = y^2 + x^2 y' \quad \text{الدالة}$$

بتطبيق معادلة أولير - لاجرانج  $(F_y = 2y, F_{y'} = x^2)$  فنحصل على :

$$y = x$$

الشروط الحدي الأول متحقق ولكن الشرط الثاني يتحقق فقط إذا كانت  $a = 1$  ولكن إذا كانت  $a \neq 1$  فإنه لا توجد منحنيات قصوى تحقق الشروط الحدية لتحديد نوع القيمة القصوى (عظمى أو صغرى).

من شرط لاجندر  $F_{y'y'} > 0$  للقيمة الصغرى،  $F_{y'y'} < 0$  للقيمة العظمى، وحيث إن  $F_{y'y'} = 0$  نظراً لأن المنحنى خط مستقيم فإن القيمة لا عظمى ولا صغرى.

**مثال :** أوجد معادلة أقصر بعد بين نقطتين على سطح كرة.

**الحل :**

في الإحداثيات الكروية  $(r, \theta, \phi)$

مربع طول عنصر القوس

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

على سطح الكرة  $r = a$  فإن  $dr = 0$  ويكون

$$(dS)^2 = 0 + (a d\theta)^2 + (a \sin \theta d\phi)^2$$

المطلوب إيجاد القيمة الصغرى للتكامل :

### الملاحق

$$I = \int dS = \int \sqrt{(a d\theta)^2 + (a \sin \theta d\phi)^2}$$

$$= a \int \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta} d\theta, \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\phi}$$

بتطبيق معادلة أولر - لاجرانج

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta'} \right) = 0$$

$$F(\phi, \theta, \theta') = \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta}$$

حيث

نحصل على :

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta}} - \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta}} \right) = 0$$

ومنها بعد الاختصار

$$\sin \theta \theta'' - 2 \sin \theta \theta'^2 - \sin^2 \theta \cos \theta = 0$$

نفرض أن :

$$\theta' = p \Rightarrow \theta'' = \frac{dp}{d\phi}, \quad \frac{dp}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{dp}{d\theta} \cdot p$$

∴ المعادلة التفاضلية تصبح :

$$p \frac{dp}{d\theta} \sin \theta - 2 \cos \theta p^2 = \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\frac{dw}{d\theta} = 2p \frac{dp}{d\theta} \quad \text{فإن } p^2 = w$$

$$\therefore \frac{dw}{d\theta} - 2w \cot \theta = \sin^2 \theta \cos \theta$$

وهذه معادلة خطية لها عامل التكامل

$$\mu = e^{-4 \int \cot \theta d\theta} = e^{-4 \lim \sin \theta} = \frac{1}{\sin^4 \theta}$$

## الملاحق

بالضرب في عامل التكامل ثم التكامل للمعادلة التفاضلية السابقة نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^4 \theta} w &= \int \frac{1}{\sin^4 \theta} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta + C \\ \therefore \frac{p^2}{\sin^4 \theta} &= -\frac{1}{\sin^2 \theta} + C \\ p^2 &= C \sin^4 \theta - \sin^2 \theta \\ p = \frac{d\theta}{d\phi} &= \sqrt{C \sin^4 \theta - \sin^2 \theta} = \sin \theta \sqrt{C \sin^2 \theta - 1} \end{aligned}$$

بفصل المتغيرات ثم التكامل نحصل على :

$$\begin{aligned} \int \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{C \sin^2 \theta - 1}} &= \int d\phi \\ \therefore \sin^{-1} \left( \frac{\cot \theta}{A} \right) &= -\phi + \beta \end{aligned}$$

حيث  $A^2 = C - 1$  ،  $\beta$  ثابت تكامل.

# المراجع

المراجع الأجنبية

- 1) Solutions of Problems in Applied Mechanics.  
By A.N. Gobby.
- 2) A text book of "Applied Mechanics".  
By R.S. Khurmi
- 3) The Elementary of Statics and Dynamics.  
By S.L. Loney.
- 4) Calculus of Variations, Routledge & Kegan Paul Lane, 1975. by:  
Arthurs A. M. ,
- 5) Analytical Dynamics Published:10/1998 Publisher: McGraw-Hill  
by: Haim Baruh
- 6) Analytical mechanics Published:August1995. Brace Publisher:  
Harcourt by: Grant R. Fowles
- 7) Analytical Mechanics Published:11/1998 Publisher: Cambridge  
University Press, by: Louis N. Hand, Janet D. Finch

## المراجع

### المراجع العربية

م	المؤلف	اسم الكتاب	المترجم	دار النشر	عام
١	موراي ر. شيجل	الميكانيكا العامة وتطبيقاتها	د. أحمد فؤاد باشا	دار ماكروهيل	١٩٦٧
٢	س. تيموشنكو، د. ه. ينج	الديناميكا العالية	د. حماد يوسف حماد د. الفونس رياض يعقوب	مكتبة الأنجلو المصرية	١٩٧٠
٣	كرانت ر. فاوولس	الميكانيك التحليلي	د. طالب ناهي الخفاجي	وزارة التعليم والبحث العلمي - بغداد	١٩٧٠
٤	ج. ل. ليتش	الميكانيك التقليدية	د. فوزي غالب عوض د. عبد الملك عبد الرحمن	عمادة شؤون المكتبات - جامعة الملك سعود الرياض.	١٩٨٦
٥	د. إبراهيم محمد النعسان	الميكانيك التحليلي		مطبوعات جامعة دمشق	١٩٨٩
٦	ف. جانتماخر	الميكانيكا التحليلية	د. محمد إسماعيل	دار مير للطباعة والنشر.	١٩٧١